O wartościach funkcyi analitycznej
na okręgach spółśrodkowych
z kołem zbieżności jej elementu

napisał

Józef Puzyna.

Poszukiwania, które w tej rozprawie podaję, dzielą się na dwie kategorye. Pierwsze z nich prowadzą do twierdzeń arytmetycznych o wartościach funkcyi analitycznej [Rozdz. I], drugie mieszczą już w sobie pojęcie ciągłości takiejże funkcyi [Rozdz. II]. Tak jedne, jak drugie mają za punkt wyjścia: analityczne wyrażenie średniej arytmetycznej z wartości, jakie dana funkcya przybiera w wierzchołkach foremnego m- boku, którego środek schodzi się ze środkiem koła zbieżności (R) elementu, $\mathfrak{P}(x-x_0)$ rozważanej funkcyi.

Te rozważania ustanawiają związek między samym danym szeregiem a szeregiem na który się składają wszystkie wyrazy o wykładnikach $\equiv 0$ (mod. m). Przytem okazuje się, że do wyznaczenia wspomnianej średniej arytmetycznej w samem kole (R) wystarcza zawsze już sam dany szereg. Lecz w niektórych przypadkach, które tu wyszczególnimy, określa sam szereg potęgowy bez swych przeprowadzań także średnie arytmetyczne funkcyi przezeń określonej i poza kołem swojej zbieżności. W niektórych przypadkach będzie można znowu z wartości funkcyi w m wierzchołkach m- boku wnioskować o wartości funkcyi w środku tego m- boku. Przypomina to twierdzenie Cauchy'ego

o zależności funkcyi jednoznacznej wewnątrz danego zamkniętego konturu od wszystkich wartości funkcyi na samymże konturze.

Kładąc $m = \infty$, przechodzimy z m- boku foremnego do koła, a z twierdzeń arytmetycznych do twierdzeń, w których się już uwzględnia ciągłość wartości funkcyi na tem kole. Tożsamość sumy pozostałości (*residuów*) funkcyi jednoznacznej w danym konturze z całką zamkniętą tego konturu jest tu tylko granicznym przypadkiem form arytmetycznych. Taki kontur jest tu okręgiem spółśrodkowym (r) > (R) z kołem zbieżności (R) danego szeregu. I w tym właśnie przypadku otrzymujemy tu określenie sumy pozostałości (*residua*) we wnętrzu takiego koła inne od tych, jakie dotychczas znane są w analizie. Ta definicya ważna będzie może z tego powodu, że określa tę sumę pewnym (granicznym) wyrazem, który ma swój początek wyłącznie w samym szeregu danym (Roz. II, §. 14).

Taki sam wyraz w dziedzinie funkcyj wieloznacznych jest przedewszystkiem nieskończenie wielowartościowym i jest sumą całek okrążających punkty wielokrotne szczególne, zawarte we wnętrzu koła (r). Lecz równem prawem przedstawić go można w kształcie sumy całek obliczanych — po oddzielnych łukach składających całe koło (r)—w ten sposób, że na poszczególnych łukach tego koła wartości funkcyi z jej różnych gałęzi sumować trzeba.

W teoryi funkcyj analitycznych używa Weierstrass bardzo często nierówności

$$(\alpha) \qquad |a^{\lambda}|\,|x-x_0|^{\lambda} \leq g, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots\ldots,$$

w której po lewej stronie mamy bezwzględną wartość wyrazu danego szeregu, po prawej zaś ilość g jest największą z bezwzględnych wartości tegoż szeregu wziętą na kole (r) < (R). Do tej nierówności dochodzę również z twierdzeń arytmetycznych, w których rozważam największą z bezwzględnych wartości funkcyi w wierzchołkach m-boku foremnego. Badam potem, jak się takie arytmetyczne związki i nierówność (α) dają przenieść jeszcze poza koło zbieżności szeregu. I tu znowu pozostałości funkcyi jednoznacznej, a zamknięte całki funkcyi wieloznacznej w ścisłym pozostają związku z wartością g na kole (r) > (R). Przy tej sposobności odszczególniam te przypadki, w których się związek (α) przenosi wprost bez żadnej zmiany poza koło (R).

ROZDZIAŁ I.

§. 1. Uwagi wstępne.

W poszukiwaniach moich opierać się będę na następujących powszechnie znanych prawdach:

1) Gdy $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ są pierwiastkami równania $z^m - 1 = 0$, to

$$\varepsilon_0^s + \varepsilon_1^s + \varepsilon_2^s + \ldots + \varepsilon_{m-1}^s = m, \tag{a}$$

gdzie $s \equiv 0 \pmod{m}$ bez różnicy, czy $s > 0$, czy < 0; w każdym innym przypadku (s całkowite) jest suma (a) zerem.

2) Gdy ε jest jednym z pierwotnych pierwiastków równania $z^m - 1 = 0$, x nieograniczoną zmienną urojoną, x_0 liczbą stałą, a $(x - x_0) = a + bi = q$ daje punkt $x = S_0$ na płaszczyźnie argumentu x, to równania:

$$\begin{aligned}
(x - x_0) &= q \\
(x' - x_0) &= q\varepsilon = (x - x_0)\varepsilon \\
(x'' - x_0) &= q\varepsilon^2 = (x - x_0)\varepsilon^2 \\
&\vdots \\
(x^{(m-1)} - x_0) &= q\varepsilon^{m-1} = (x - x_0)\varepsilon^{m-1}
\end{aligned} \tag{b}$$

dają na płaszczyźnie argumentu x m punktów:

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \ldots, S_{m-1} \tag{c}$$

wyznaczonych liczbami:

$$x = x_0 + q, \quad x' = x_0 + q\varepsilon, \quad x'' = x_0 + q\varepsilon^2, \ldots, x^{(m-1)} = x_0 + q\varepsilon^{m-1}$$

spełniającemi równania (b).

Punkty (c) połączone ze sobą prostemi w porządku (c) utworzą m-bok foremny o środku x_0.

Taki wielobok nazywam wielobokiem, należącym mod. m do punktu $x = S_0$, a jego wierzchołki (c) punktami należącymi mod. m do punktu S_0.

Przytem punkty (c) można wziąć za należące mod. m do któregokolwiek z tych punktów.

3) W skutek tożsamości (b) mamy zawsze

$$f[(x - x_0)\varepsilon^\mu] = f(x^{(\mu)} - x_0),$$

co znaczy: wartość funkcyi $\varphi(x) = f(x - x_0)$ w punkcie $x = S_0$ przechodzi na jej wartość $\varphi(x^{(\mu)})$ w punkcie S_μ, kiedy się w niej za $x - x_0$ położy $(x - x_0)\varepsilon^\mu$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m - 1$.

Funkcye:

$$f(x-x_0),\quad f[(x-x_0)\varepsilon],\ldots,\quad f[(x-x_0)\varepsilon^{m-1}]$$

są więc wartościami

$$\varphi(x)\quad \varphi(x')\ldots\ldots,\quad \varphi(x^{(m-1)})$$

tej samej funkcyi $\varphi(x)$ w punktach (c) należących mod. m do punktu $x = S_0$.

§. 2. **O szeregu wydzielonym** mod. m.

Po tych uwagach weźmy szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots.$$

(1) $$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x-x_0)^\lambda$$

zbieżny w zakresie $|x-x_0| < R$, a więc w kole (R) o środku x_0 i obierzmy dodatną, całkowitą, zresztą dowolną, liczbę $m > 1$.

Wydzielmy z szeregu (*1*) wszystkie wyrazy $a_\lambda(x-x_0)^\lambda$ o wykładnikach $\lambda \equiv \mu$ (mod. m), gdzie μ jest liczbą dodatną, całkowitą, mniejszą niż m. Tedy te wyrazy dodane do siebie utworzą szereg

$$a_\mu(x-x_0)^\mu + a_{\mu+m}(x-x_0)^{\mu+m} + a_{\mu+2m}(x-x_0)^{\mu+2m} + \ldots.$$

$$= (x-x_0)^\mu[a_\mu + a_{\mu+m}(x-x_0) + a_{\mu+2m}(x-x_0)^{2m} + \ldots]$$

$$= (x-x_0)^\mu\, \mathfrak{P}_\mu((x-x_0)^m),$$

a gdy liczbie μ nadawać będziemy kolejno wartości $0, 1, 2, \ldots, m-1$, będziemy mogli położyć

$$\mathfrak{P}(x-x_0) =$$

(2) $$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m) + (x-x_0)\mathfrak{P}_1((x-x_0)^m) + (x-x_0)^2\mathfrak{P}_2((x-x_0)^m) + \ldots.. + (x-x_0)^{m-1}\mathfrak{P}_{m-1}((x-x_0)^m).$$

W tem równaniu niech $x = S_0$ będzie miejscem dowolnem, różnem od x_0, obranem wewnątrz koła (R) tak, że $|x-x_0| = r < R$. Wstawmy dalej w (2) zamiast $(x-x_0)$ kolejno:

$$(x-x_0),\ (x-x_0)\varepsilon,\ (x-x_0)\varepsilon^2, \ldots,\ (x-x_0)\varepsilon^{m-1},$$

gdzie ε jest jednym z pierwotnych pierwiastków równania $z^m - 1 = 0$, tedy przez to — według uwagi 3-ciej §-fu 1go — dostaniemy po lewej stronie wartości szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ na m miejscach (c) należących mod. m do punktu S_0. Dodawszy zaś te wartości, otrzymamy:

$$\mathfrak{P}(x-x_0)+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^2)+\ldots+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})$$

$$= m.\,\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)+\sum_{\mu=1}^{m-1}(x-x_0)^\mu.\,\mathfrak{P}_\mu((x-x_0)^m)\,[1+\varepsilon^\mu+\ldots+\varepsilon^{(m-1)\mu}]. \quad (3)$$

Gdy μ jest liczbą pierwszą względem m, to $\varepsilon^\mu=\varepsilon_1$, jest znowu pierwotnym pierwiastkiem równania $z^m-1=0$ i wtedy mamy

$$1+\varepsilon^\mu+\varepsilon^{2\mu}+\ldots+\varepsilon^{(m-1)\mu}=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_1^{m-1}=0.$$

Gdy μ i m mają największy wspólny dzielnik m_1, tak, że $\mu=\nu m_1$, a ν jest już pierwszem względem m, to mamy

$$1+\varepsilon^\mu+\varepsilon^{2\mu}+\ldots+\varepsilon^{(m-1)\mu}=1+\varepsilon^{\nu m_1}+\varepsilon^{2\nu m_1}+\ldots+\varepsilon^{(m-1)\nu m_1};$$

$\varepsilon^\nu=\varepsilon_2$ jest znowu pierwotnym pierwiastkiem równania $z^m-1=0$ a w skutek tego będzie

$$1+\varepsilon^\mu+\varepsilon^{2\mu}+\ldots+\varepsilon^{(m-1)\mu}=1+\varepsilon_2^{m_1}+(\varepsilon_2^2)^{m_1}+\ldots+(\varepsilon_2^{m-1})^{m_1}.$$

Że zaś jest $m_1<m$, przeto ta suma, — według uwagi 1-szej §. 1go, — jest zerem.

W skutek tego równanie (5) otrzyma postać

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)=\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)+\ldots+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})}{m}. \quad (4)$$

Połóżmy — gdy $x=S_0$ —

$$\mathfrak{P}(x-x_0)=W_0,\ \mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)=W_1,\ldots,\ \mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})=W_{m-1},$$

o mamy

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=S_0}=\frac{W_0+W_1+W_2+\ldots+W_{m-1}}{m}, \quad (I)$$

a stąd twierdzenie:

Gdy z danego szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ o kole zbieżności (R) wydzielimy szereg

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)=a_0+a_m(x-x_0)^m+a_{2m}(x-x_0)^{2m}+\ldots,$$

którego wykładniki są wielokrotnościami obranej liczby m (czyli wydzielimy szereg mod. m), to szereg ten na miejscu $x=S_0$ obranem wewnątrz (R) przedstawia średnią arytmetyczną wartości szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach należących mod. m do miejsca $x=S_0$. Przytem wartości szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ są jednakowe na miejscach $S_0, S_1, S_2,\ldots S_{m-1}$.

§. 3. Szereg potęgowy $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ o zakresie zbieżności większym (R).

Niech teraz w równaniu (4) x nie oznacza obranego punktu S_0 ale niech zmienia się dowolnie wewnątrz koła (R). Szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ przedstawia wtedy sumę

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{m}+\frac{\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)}{m}+\ldots+\frac{\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})}{m}$$

m szeregów potęgowych postępujących podług argumentu $(x-x_0)$ i jest niezawodnie zbieżnym w kole (R), gdyż szeregi (5) mają wszystkie ten sam zakres zbieżności (R). Nie idzie jednak za tem, aby koło (R) było prawdziwym zakresem zbieżności tego szeregu. Owszem zdarzyć się może, że $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ okaże się zbieżnym dla wszelkich x spełniających nierówność

$$|x-x_0|<R'$$

gdzie $R'>R$. Kiedy i przy jakich m może zajść ten przypadek, rozbierzemy z ogólnego stanowiska przy końcu tego rozdziału (§. 10). Tutaj przyjmując z góry, że mamy $R'>R$, zastanowimy się nad następstwami tego założenia.

Przedewszystkiem zauważymy: Gdy przy pewnem m mamy koło (R') szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ większe niż (R), to takich szeregów wydzielonych o kole (R') mamy nieskończenie wiele; każdy bowiem szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^{qm})$, [$q$ całkowite, dodatne], jest niezawodnie zbieżny w kole (R') będąc wydzielonym mod. qm ze szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$.

Niech $\mathfrak{P}(x-x_0)$ ma na obwodzie koła (R) punkty szczególne T_0, T'_0, T''_0, ... takie, że żadne dwa promienie $x_0\,T_0$, $x_0\,T'_0$, $x_0\,T''_0$,... nie tworzą ze sobą kąta będącego wielokrotnością $\frac{2\pi}{m}$.

Przechodząc w sumie (5) wyraz po wyrazie, znajdziemy tam szczególne punkty

$$(\alpha) \qquad T_0,\ T_{m-1},\ T_{m-2},\ \ldots,\ T_1,$$

$$(\beta) \qquad T'_0,\ T'_{m-1},\ T'_{m-2},\ \ldots,\ T'_1,$$

$$(\gamma) \qquad T''_0,\ T''_{m-1},\ T''_{m-2},\ \ldots,\ T''_1,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

tworzące grupami (α), (β), (γ), ... punkty mod. m należące do T_0, T'_0, T''_0,...

Lecz suma (5) daje szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ zbieżny w kole $(R') > (R)$, przeto jest jeszcze na obwodzie koła (R) i poza kołem (R) [w pierścieniu $(R'-R)$] wszędzie skończoną i oznaczoną. Stąd wynika, że do grupy punktów szczególnych (α) dołączyć trzeba jeszcze inne

$$U_0,\ U_{m-1},\ U_{m-2},\ \ldots,\ U_1 \qquad (\alpha')$$
$$V_0,\ V_{m-1},\ V_{m-2},\ \ldots,\ V_1 \qquad (\alpha'')$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

mod. m należące do U_0, V_0, ... w ten sposób, że gdy α'_ρ, α''_ρ, oznaczają liczby $0, 1, 2, \ldots, m-1$ w pewnem uporządkowaniu, to punkty szczególne (T_ρ, $U_{\alpha'\rho}$, $V_{\alpha''\rho}$, ...) schodzą się na jeden punkt T_ρ, a przy tem są tej natury, że znoszą się z sobą i dają w otoczeniach punktów T_ρ, $\rho = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ sumę (5) skończoną i oznaczoną.

Podobnie do grupy (β) dołączyć trzeba kilka grup (β'), (β''), ... z grupą (β) identycznych; a toż samo i grup dalszych (γ), ... dotyczyć musi.

Wynik ten możemy tak streścić:

Gdy szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada na obwodzie swego koła zbieżności (R) punkty szczególne T_0, T'_0, T''_0,... a żaden z kątów $T_0\, x_0\, T'_0$, ... nie wynosi wielokrotności $\frac{2\pi}{m}$, to aby z tego szeregu wydzielić było można szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ o kole zbieżności $(R') > (R)$, jest koniecznym, ale nie dostatecznym jeszcze warunkiem, aby się w układach punktów

$$(T_0,\ T_1,\ \ldots\ T_{m-1})$$
$$(T'_0,\ T'_1,\ \ldots\ T'_{m-1})$$
$$(T''_0,\ T''_1,\ \ldots\ T''_{m-1})$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

mod. m do T_0, T'_0, T''_0, ... należących, znajdywało po kilka punktów osobliwych danego szeregu.

Wyjdźmy poza koło (R). W punktach pierścienia $(R'-R)$ nie mają wprawdzie pojedyncze wyrazy (5) wcale znaczenia, lecz wykonana suma jest tam już i skończoną i oznaczoną $= \mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$. Stąd wynika, że jeżeli $\mathfrak{P}(x-x_0)$ jest elementem funkcyi analitycznej posiadającej $(R'-R)$ punkta szczególne, to te na kołach (R'') współśrodkowych z (R), a mie-

szczących się w $(R'-R)$ tak pod względem położenia jak i oddziaływania na skończoność sumy są takie, jak punkta szczególne na obwodzie (R), a wykonanie sumy (5) jest tu niejako pewnym rodzajem jej przeprowadzania w ten sposób, że się koło (R) zmienia na (R').

§. 4. **Określenie dróg przystających.**

Ale rozważmy równanie

(6) $$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)=\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)+\ldots+\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})}{m}$$

w punktach x leżących w obszarze

(7) $$R \leqq |x-x_0| < R'$$

jeszcze przed wykonaniem sumy po prawej stronie. Obierzmy w tym obszarze dowolny punkt S_0, który naprzód zakładamy jako nieszczególny funkcyi analitycznej określonej elementem $\mathfrak{P}(x-x_0)$.

Szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ nie mamy potrzeby przeprowadzać do punktu S_0, gdyż punkt ten leży w zakresie zbieżności tego szeregu.

Prawą stronę równania (6) uważajmy ciągle jeszcze za funkcyą jednego argumentu $(x-x_0)$.

Przeprowadzając ją, a więc każdy jej wyraz do otoczenia punktu S_0 po drodze

$$x_0,\ x_0+\alpha_1,\ x_0+\alpha_2,\ \ldots,\ x_0+\alpha_\nu,\ x_0+q=S_0$$

możemy to przeprowadzenie pojedynczych wyrazów do S_0 uważać za przeprowadzenie jednego danego szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$

po drodze	$s_0 \equiv x_0,$	$x_0+\alpha_1,\ldots,x_0+\alpha_\nu,$	$x_0+q=S_0$	do punktu	S_0
„ „	$s_1 \equiv x_0,$	$x_0+\alpha_1\varepsilon,\ldots,x_0+\alpha_\nu\varepsilon,$	$x_0+q\varepsilon=S_1$	„ „	S_1
„ „	$s_2 \equiv x_0,$	$x_0+\alpha_1\varepsilon^2,\ldots,x_0+\alpha_\nu\varepsilon^2,$	$x_0+q\varepsilon^2=S_2$	„ „	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
„ „	$s_{m-1} \equiv x_0,$	$x_0+\alpha_1\varepsilon^{m-1},\ldots,x_0+\alpha_\nu\varepsilon^{m-1},$	$x_0+q\varepsilon^{m-1}=S_{m-1}$	do p.	$S_{m-1},$

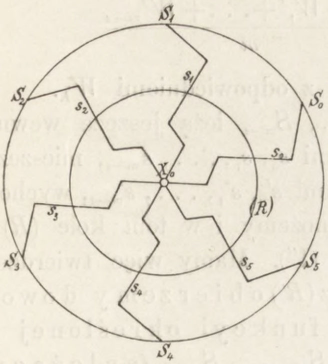


Fig. 1.

gdzie droga s_k, $k=1, 2, 3, \dots, m-1$ jest drogą s_0 o kąt $\frac{2\pi}{m}k$ obróconą (fig. 1; $m=6$)

Drogi $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$ nazywać będziemy krótko przystającemi.

Gdy po przeprowadzeniu równania (6) po drodze s_0 do punktu S_0, położymy w niem $x=S_0$, to będziemy mogli na podstawie dopiero co zrobionej uwagi w miejsce związku

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=S_0} = \left.\frac{\mathfrak{P}(x-x_0|\dots S_0)+\dots+\mathfrak{P}((x-x_0|\dots S_0)\varepsilon^{m-1})}{m}\right|_{x=S_0}$$

położyć

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=S_0} = \frac{W_0+W_1+\dots+W_{m-1}}{m}$$

gdzie $W_0, W_1, \dots, W_{m-1}$ są wartościami funkcyi określonej szeregiem $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ należących mod. m do S_0 a leżących już w obszarze (7). Atoli przy tem zastrzegamy, że owe $W_0, W_1, \dots, W_{m-1}$ są otrzymane z przeprowadzeń po drogach przystających. (Ten warunek odpada, gdy mamy do czynienia z funkcyą jednoznaczną).

Wskutek tego, że koło zbieżności (R') szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ jest większe niż (R), będzie można równanie I′ nawet wtedy zatrzymać, kiedy S_0 jest punktem szczególnym funkcyi o elemencie $\mathfrak{P}(x-x_0)$ z tą jednak uwagą, że wtedy kilka W_λ może tam być bez znaczenia, a ich wyrazy nie mające analitycznego znaczenia zawsze znosić się będą.

§. 5. Średnia arytmetyczna wartości funkcyi wieloznacznej.

Ponieważ wcale nie zakładamy jednoznaczności funkcyi określonej elementem $\mathfrak{P}(x-x_0)$, przeto musimy dla ogólności przyjąć, że zmieniając drogi $s_0, s_1, \dots, s_2, \dots s_{m-1}$, na inne przystające $s'_0, s'_1, \dots s_{m-1}$, prowadzące do tych samych punktów $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ możemy tam dostać inne wartości funkcyi n. p. wartości $W_0', W_1', \dots, W'_{m-1}$.

Mimo tego, z powodu że $R' > R$ i że punkty $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ mieszczą się w pierścieniu (7) mamy i tutaj

$$(\mathrm{I}'') \qquad \mathfrak{P}_0\,((x-x_0)^m)_{x=S_0} = \frac{W_0'+W_1'+\ldots+W'_{m-1}}{m}$$

Niektóre z tych W'_λ mogą być teżsame z odpowiedniemi W_λ.

Podobnież, gdy punkta $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ leżą jeszcze wewnątrz koła zbieżności (R), a do nich raz drogami $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$, mieszczącemi się całkowicie w (R), drugi raz drogami $s'_0, s'_1, \ldots, s'_{m-1}$, wychodzącemi już poza (R), dochodzić będziemy, możemy i w tem kole (R) dostać raz związek (I'), drugi raz związek (I''). Mamy więc twierdzenie:

Kiedy $(R') > (R)$, a wewnątrz (R') obierzemy dowolny punkt S_0 i obliczymy wartości funkcyi określonej elementem $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ (należących mod. m do S_1), dochodząc do nich po jakichkolwiek drogach przystających, to na średnią arytmetyczną owych wartości dostaniemy zawsze $\mathfrak{P}_0\,((x-x_0)^m)_{x=S_0}$.

Niech n. p. przy $x_0=0$ dany będzie szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x)=1+\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4^4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{4^8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{12}}{4^{12}}+\ldots\ldots$$

zbieżny w kole $(R)=(1)$.

$\mathfrak{P}(x)$ jest widocznie elementem analitycznej (wieloznacznej) funkcyi

$$f(x)=\frac{1}{1-(\frac{x}{4})^4}+\operatorname{arc\,tg} x,$$

a wydzielając z niego szereg potęgowy mod. 4 dostajemy:

$$\mathfrak{P}_0\,(x^4)=1+(\tfrac{x}{4})^4+(\tfrac{x}{4})^8+(\tfrac{x}{4})^{12}+\ldots=\frac{1}{1-(\frac{x}{4})^4}$$

o kole zbieżności $(R')=(4)$.

Mamy tu więc $(R') > (R)$, a stąd wynika, że gdy tylko takie obierzemy, że jest $|x| < 4$, punkty

$$x=S_0,\ x\,i=S_1,\ -x=S_2,\ -x\,i=S_3$$

należące mod. m do S_0 leżą wszystkie w kole $(R')=(4)$, a związek

$$(8) \qquad \frac{1}{1-(\frac{x}{4})^4}=\frac{f(x)+f(xi)+f(-x)+f(-xi)}{4}$$

będzie prawdziwym po jakichkolwiek przystających drogach dochodzimy do wartości $f(x)=W_0$, $f(xi)=W_1$, $f(-x)=W_2$, $f(-xi)=W_3$.

Połóżmy $x=2$, to wtedy będzie

$$S_0=2,\ S_1=2i,\ S_2=-2,\ S_3=-2i.$$

Przyjmijmy, że do tych miejsc dochodzimy przystającemi drogami s_0, s_1, s_2, s_3 takiemi, że s_0 jest półkręgiem koła biegnącym nad odcinkiem $(0 \ldots . + 2)$ i ma ten odcinek za średnicę (fig. 2). W takim razie, gdy kąt φ zmienia się od 0 do π, możemy te drogi w ten sposób przedstawić:

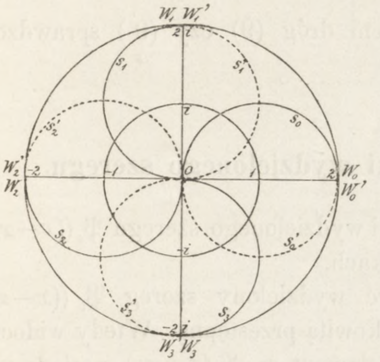


Fig. 2.

$$\left.\begin{array}{l} s_0 \ldots . + 1 - 1 \,.\, e^{-\varphi i} \\ s_1 \ldots . + i - i \; e^{-\varphi i} \\ s_2 \ldots . - 1 + 1 \,.\, e^{-\varphi i} \\ s_3 \ldots . - i + i \; e^{-\varphi i} \end{array}\right\} \varphi = (0 \ldots \pi) \quad (9)$$

Posługując się dalej wzorem

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} . \log \frac{1 + xi}{1 - xi}$$

i używając dróg (9), dostajemy:

$$f(2) = W_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{1}{2i} . \log \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$$

$$f(2i) = W_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{1}{2i} . \log \frac{-i^2 \, e^{-\pi i}}{3} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \log 3$$

$$f(-2) = W_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} - \frac{1}{2i} . \log \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$$

$$f(-2i) = W_3 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{1}{2i} . \log \frac{2 + i^2 \, e^{-\pi i}}{-i^2 \, e^{-\pi i}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{1}{2i} . \log \frac{3}{-i^2 e^{-\pi i}}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} + \frac{1}{2i} . \log . 3 + \frac{\pi}{2}$$

Użyjmy przeciwnie dróg s'_0, s'_1, s'_2, s'_3 takich, że droga s'_0 jest półkręgiem koła biegnącym pod odcinkiem $(0 \ldots . + 2)$ i ma ten odcinek za średnicę (fig. 2), to mamy wtedy:

$$(9') \qquad \left.\begin{array}{l} s'_0 \ldots . \quad 1 - 1 \,.\, e^{+\varphi i} \\ s'_1 \ldots . \quad i - i \,.\, e^{+\varphi i} \\ s'_2 \ldots . - 1 + 1 \,.\, e^{+\varphi i} \\ s'_3 \ldots . - i + i \,.\, e^{+\varphi i} \end{array}\right. \quad \varphi = (0 \ldots \pi)$$

i

$$W_0{}' = W_0$$
$$W_1{}' = W_1 + \pi$$
$$W_2{}' = W_2$$
$$W_3{}' = W_3 - \pi$$

W obydwu jednak razach mamy:

$$\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^4}=\frac{16}{15}=\frac{W_0+W_1+W_2+W_3}{4}=\frac{W_0'+W_1'+W_2'+W_3'}{4},$$

a więc związek (8) czy to za użyciem dróg (9) czy (9') sprawdzony.

§. 6. Szczególne przypadki wydzielonego szeregu.

Zajmijmy się teraz własnościami wydzielonego szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ w pewnych uwagi godnych przypadkach.

A). W szczególności może być wydzielony szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ funkcyą całkowitą wymierną lub całkowitą przestępną. Wtedy widocznie funkcya analityczna $f(x)$ określona elementem $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada własność wyrażoną równaniem I (lub równaniami I', I'') na całej płaszczyźnie argumentu x, to znaczy: ze względu na punkty $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ leżące na dowolnie wielkiem kole o środku x_0.

B). Przyjmijmy, że dany szereg $\mathfrak{P}(x-x_0)$ nie posiada wcale wyrazów o wykładnikach $\lambda \equiv 0 \,(\text{mod. } m)$ prócz wolnego wyrazu $a_0=f(x_0)$. Wtedy, — gdy w równaniu I właśnie tej liczby m użyjemy, — mieć będziemy:

$$(\text{I}a)\qquad a_0=f(x_0)=\frac{W_0+W_1+\ldots+W_{m-1}}{m},$$

gdzie $W_0, W_1, \ldots, W_{m-1}$ są wartości funkcyi $f(x)$ w punktach S_0, $S_1, \ldots, S_{m-1}$ leżących na dowolnem kole o środku x_0.

W miejsce m można tu użyć także liczby qm $(q=2, 3, 4, \ldots.)$ tak, że równocześnie ze związkiem (I*a*) istnieje jeszcze związek

$$(\text{I}b)\qquad a_0=f(x_0)=\frac{\overline{W}_0+\overline{W}_1+\ldots+\overline{W}_{qm-1}}{qm}$$

o $S_0, S_1, \ldots, S_{qm-1}$ branych na dowolnem kole o środku x_0.

C). Gdy szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada wykładniki $\lambda\equiv 0$ (mod. m) tylko do skończonej granicy

$$(t-1)\,.\,m_1,$$

$(t-1)$ całkowite dodatne, to używając tu liczby $m=qm$, $q=t$, $t+1$, $t+2, \ldots.$ mamy i tu

$$a_0=f(x_0)=\frac{W_0'+W_1'+\ldots+W'_{qm_1-1}}{qm_1}$$

przy $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ branych na dowolnem kole o środku x_0.

Stałą $f(x_0)$ można zatem w przypadkach B) i C) nazwać niezmiennikiem funkcyi $f(x)$ w punkcie x_0 ze względu na ruchomy system punktów $S_0, S_1, \dots S_m$ i wartości liczby m brane w dozwolonych granicach.

D). Przyjmijmy, że szereg $\mathfrak{P}(x-x_0)$ nie posiada wprawdzie własności B) i C), ale że już iloczyn $(x-x_0)$, $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada jedną z tych własności. Wtedy, ponieważ $(x-x_0)$, $\mathfrak{P}(x-x_0)$ ma wolny wyraz $=0$, dostajemy na niezmiennik funkcyi analitycznej $(x-x_0), f(x)$ w punkcie x_0 wartość $=0$.

Niech będzie $f(x)$ całkowitą wymierną funkcyą n-go stopnia

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n.$$

Po przeprowadzeniu jej do otoczenia miejsca x_0 otrzymamy:

$$f(x)=f(x_0)+a'_1(x-x_0)+a'_2(x-x_0)^2+\dots+a'_n(x-x_n)^n.$$

Obierzmy $m>n$, to rozwinięcie (10) prócz wyrazu wolnego $f(x_0)$ nie posiada już zresztą żadnych wyrazów o wykładnikach $\lambda \equiv 0 \,(\text{mod. } m)$, a stąd według B) otrzymamy:

$$f(x_0)=\frac{f(S_0)+f(S_1)+\dots+f(S_{m-1})}{m}$$

to zn:

G d y n a p ł a s z c z y ź n i e a r g u m e n t u x f u n k c y i w y m i e r n e j c a ł k o w i t e j $f(x)$ s t o p n i a n-go n a r y s u j e m y w i e l o b o k f o r e m n y t a k i, ż e l i c z b a j e g o b o k ó w m p r z e w y ż s z a s t o p i e ń n, t o ś r e d n i a a r y t m e t y c z n a w a r t o ś c i f u n k c y i w w i e r z c h o ł k a c h $S_0, S_1, \dots S_{m-1}$ t e g o w i e l o b o k u r ó w n a s i ę w a r t o ś c i f u n k c y i w ś r o d k u t e g o w i e l o b o k u.

T a ś r e d n i a a r y t m e t y c z n a b ę d z i e m i a ł a w a r t o ś ć z e r o, g d y ś r o d e k w i e l o b o k u j e s t z a r a z e m p u n k t e m p i e r w i a s t k o w y m f u n k c y i.

Kiedy $m=n$, to zawsze będzie:

$$\left[f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]_{x=S_0}=\frac{f(S_0)+f(S_1)+\dots+f(S_{n-1})}{n}$$

Gdy w szczególności

$$f(x)=a_0+a_nx^n$$

a x_0 obierzemy w punkcie $x=0$, to, biorąc $m>n$ lub takie, że żadna jego wielokrotność nie jest $=n$, mieć będziemy

$$a_0=\frac{f(S_0)+f(S_1)+\ldots+f(S_{m-1})}{m}.$$

§. 7. O wartościach przeprowadzeń szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ w punktach $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$.

Przyjąwszy $(R')\geq(R)$ i skończone, rozważmy teraz związek I poza kołem (R').

Obierając S_0 poza kołem (R') przeprowadźmy $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ po pewnej obranej drodze s_0 do otoczenia tego punktu; zakładamy przytem, że S_0 nie jest punktem szczególnym,

W S_0 niech ma ten szereg wartość $W(S_0)_{s_0}$, a że jest tożsamościowo:

$$\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)=\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m\,\varepsilon^m)=\ldots=\mathfrak{P}_0((x-x_0)\,\varepsilon^{(m-1)\,m}),$$

a przeprowadzenie szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m\,\varepsilon^{km})$ po drodze s_0 do punktu S_0 jest przeprowadzeniem szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ po drodze s_k przystającej z s_0 do S_k, $(k=1, 2, 3, \ldots m-1)$, więc stąd wnosimy:

P r z e p r o w a d z e n i a w y d z i e l o n e g o s z e r e g u $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ d o p u n k t ó w $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ l e ż ą c y c h p o z a j e g o k o ł e m z b i e ż n o ś c i (R') d o k o n a n e d r o g a m i p r z y s t a j ą c e m l $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{m-1}$ m a j ą w t y c h p u n k t a c h j e d n ę i t ę s a m ą w a r t o ś ć $W(S_0)_{s_0}$; a k i e d y W_{0,s_0}, $W_{1,s_0}, \ldots W_{m-1, s_{m-1}}$ s ą w a r t o ś c i, j a k i e f u n k c y a $f(x)$ o k r e ś l o n a e l e m e n t e m $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w p u n k t a c h $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ p o d r o g a c h $s_0, s_1, \ldots s_{m-1}$ d o s t a j e, t o m a m y z w i ą z e k

$$(\mathrm{I}'')\qquad W(S_0)_{s_0}=\frac{W_{0,s_0}+W_{1,s_1}+\ldots+W_{m-1,s_{m-1}}}{m}$$

Lecz zauważyć tu trzeba, że zmieniając drogę s_0 na inną s'_0 prowadzącą również do punktu S_0 możemy z $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ dostać wartość $W(S_0)_{s'_0}$ różną od wartości $W(S_0)_{s_0}$, tak, że w owalu zamkniętym drogami s_0, s'_0 leży widocznie wielokrotny punkt szczególny T_0 funkcyi określonej szeregiem $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$. Wtedy przeprowadzenie szeregu $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ po drogach s_k, s'_k, $(k=1, 2, \ldots m-1)$ dają również w punkcie S_k dwie różniące się wartości $W(S_0)_{s_0}$ i $W(S_0)_{s'_0}$, a stąd wynika, że punkt wielokrotny T_0 pociąga za sobą cały układ punktów

$$T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$$

należących mod. m do T_0 posiadających ten sam rodzaj szczególności.

Odpowiednio do dróg $s_0', s_1', \ldots, s_{m-1}'$ dostaniemy tu związek odmienny od I''', a mianowicie:

$$(\mathrm{I}'''') \qquad W(S)_{s_0'} = \frac{W_{0, s_0'} + W_{1, s_1'} + \ldots + W_{m-1, s_{m-1}'}}{m},$$

gdzie wartość $W_{k, s_k'}$ funkcyi $f(x)$ w punkcie S_k jest w ogólności różną od W_{k, s_k}.

Wreszcie nadmienić tu jeszcze trzeba, że kiedy $(R') = (R)$, a $\mathfrak{P}(x - x_0)$ posiada α punktów szczególnych jakichkolwiek $T_0', T_0'', \ldots T_0^{(\alpha)}$ tak położonych, że żaden z kątów $T_0' x_0 T_0'', T_0' x_0 T_0''', \ldots. T_0' x_0 T_0^{(\alpha)}, T_0'' x_0 T_0^{(\alpha)}, \ldots. T_0^{(\alpha-1)} x_0 T_0^{(\alpha)}$ nie wynosi wielokrotności $\frac{2\pi}{m}$, to szereg wydzielony $\mathfrak{P}_0((x - x_0)^m)$ posiada koniecznie αm punktów szczególnych:

$$\begin{array}{llll} T_0' & , T_1' & \ldots, & T_{m-1}' \\ T_0'' & , T_1'' & \ldots, & T_{m-1}^{(\alpha)} \\ \vdots & & & \\ T_0^{(\alpha)} & , T_1^{(\alpha)} & \ldots, & T_{m-1}^{(\alpha)} \end{array}$$

należących mod. m do odpowiednich punktów $T_0', T_0'', \ldots T_0^{(\alpha)}$. Ta uwaga wynika wprost z wyznaczenia szczególnych punktów w poszczególnych wyrazach sumy (5).

Stosownie do powyższych uwag rozważmy szereg potęgowy

$$\mathfrak{P}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \log(1 + x).$$

Ma on koło zbieżności $(R) = (1)$ i jedyny punkt szczególny (wielokrotny) $x = -1 = T_0'$.

Biorąc $m = 2n$, czyli liczbę parzystą, mamy

$$(10) \qquad \mathfrak{P}_0(x^{2n}) = -\frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{4n}}{4n} - \frac{x^{6n}}{6n} - \ldots.$$

Szereg ten jest znowu zbieżny w kole $(R') = (R) = (1)$ i ma $2n$ punktów szczególnych:

$$(\mathrm{a}) \qquad T_0' = -1,\ T_1' = -1.\, e^{\frac{2\pi i}{2n}},\ T_2' = -1.\, e^{2.\frac{2\pi i}{2n}}, \ldots, T_{2n-1}' = -1.\, e^{(2n-1)\frac{2\pi i}{2n}}$$

należących widocznie mod. $2n$ do punktu $T_0' = -1$.

Poza kołem (R') obierzmy punkta:

(b) $S_0 = 2,\ S_1 = 2 . e^{\frac{2\pi i}{2n}},\ S_2 = 2 . e^{2 . \frac{2\pi i}{2n}}, \ldots\ S_{2n-1} = 2 . e^{(2n-1)\frac{2\pi i}{2n}}$

i obliczmy wartości funkcyi $\log\,(1+x)$ w tych punktach, dochodząc do nich naprzód drogami przystającemi do drogi

$$s_0 = +1 - 1 . e^{\varphi i},\ \varphi = (0 \ldots \pi).$$

Wartości te będą:

$$W_{k,\,s_k} = \log\,[1 + e^{\frac{2\pi k i}{2n}} (1 - e^{\pi i})] = \log\,(1 + 2 e^{\frac{\pi k i}{n}}),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Gdy zaś celem obliczenia wartości $\log\,(1+x)$ na miejscach (b) użyjemy dróg przystających do drogi

$$s'_0 = 1 - 1 . e^{-\varphi i},\ \varphi = (0 \ldots \pi),$$

to mieć będziemy:

$$W_{k,\,s'_k} = \log\,[1 + e^{\frac{\pi k i}{n}} (1 - e^{-\pi i})]$$

$$= \log e^{2 l \pi i} [1 + e^{\frac{\pi k i}{n}} (1 - e^{-\pi i})]$$

$$= \log e^{2(l-1)\pi i} [1 + e^{\frac{\pi k i}{n}} (1 - e^{\pi i})]$$

$$= \log e^{2(l-1)\pi i} (1 + 2 . e^{\frac{\pi k i}{n}}).$$

Przytem użyć trzeba $l = 0$ dla tych h dróg s'_k, które razem z s otaczają punkt $x = -1$.

Dla wszelkich innych pozostałych dróg użyć trzeba $l = 1$. Ilość h kół $(s_k\ s'_k)$ mieszczących w sobie punkt $x = -1$ będzie taka, ile punktów (a) zawrze w sobie koło o promieniu $= 1$ zatoczone z punktu $x = -1$. Gdy przypadkowo dwa z takich kół przechodzi właśnie przez punkt $x = -1$, to albo i te do owych h kół zaliczymy, albo liczbę h o dwie jednostki pomniejszymy.

W skutek tego mamy:

$$W_{k\,s'_k} = -2\eta . \pi i + \log\,(1 + 2 e^{\frac{\pi k i}{n}}),$$

gdzie według potrzeby $\eta = 0$, lub $= 1$.

Według tych uwag położywszy teraz:

$$\text{(A)}\qquad \frac{W_{0\,s_0'}+W_{1\,s_1'}+\dots+W_{2n-2,\,s_{2n-1}'}}{2n}=\frac{1}{2n}\log(1-2^{2n})$$

$$\text{(B)}\qquad \frac{W_{0\,s_0'}+W_{1\,s_1'}+\dots+W_{2n-1,\,s_{2n-1}'}}{2n}=-\frac{2h\pi i}{2n}+\frac{1}{2n}\log(1-2^{2n})$$

Te same średnie arytmetyczne dostaniemy z wydzielonego szeregu (10). Oznaczmy go na chwilę przez u, to mamy:

$$\frac{du}{dx}=-x^{2n-1}-x^{4n-1}-x^{6n-1}-\dots$$

$$=\frac{-x^{2n-1}}{1-x^{2n}},$$

a stąd:

$$u=\mathfrak{P}_0(x^{2n})=\frac{1}{2n}\log(1-x^{2n}).$$

Przeprowadzając tę funkcyę po drodze s_0 do $S_0=2$, otrzymamy na jej wartość w tym punkcie:

$$W(S_0)_0=\frac{1}{2n}\log\left[1-(1-e^{\pi i})^{2n}\right]=\frac{1}{2n}\log(1-2^{2n}),$$

a więc średnią arytmetyczną (A). Gdy przeciwnie użyjemy drogi s_0' i zauważymy, że koło $(s_0\,s_0')$ zawiera właśnie h punktów szczególnych (a) szeregu (10), to mieć będziemy:

$$W(S_0)_{s_0'}=-\frac{2h\pi i}{2n}+\frac{1}{2n}\log(1-2^{2n}),$$

a więc średnią arytmetyczną (B).

§. 8. O największej bezwzględnej wartości mod. m.

Wracając do ogólnej teoryi, ze związku (I) mamy oczywistą relacyą:

$$\text{(II)}\qquad |\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=s_0}|\leq\frac{|W_0|+|W_1|+\dots+W_{m-1}|}{m},$$

gdy zaś z wartości $|W_0|, |W_1|, \dots, |W_{m-1}|$ największą, oznaczymy przez G, to mamy:

$$\text{(III)}\qquad |\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)_{x=S_0}|\leqq G.$$

To znaczy: Bezwzględna wartość wydzielonego szeregu mod. m w punkcie S_0, zawartym w kole (R), nie jest nigdy większa od największej z bezwzględnych wartości funkcyi $f(x)$ [szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$, należących mod. m do S_0 (największej z bezwzględnych wartości mod. m).

Gdy zakres zbieżności (R') szeregu wydzielonego jest większy niż koło (R) [i jest skończonym albo nieograniczonym], to związek (III) otrzymuje się w całem wnętrzu koła (R') z tem zastrzeżeniem, że teraz G jest największą pomiędzy bezwzględnemi wartościami, jakie $f(x)$ w puntach $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$ przybiera po drogach przystających.

Gdy zaś $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ posiada ze względu na obraną liczbę m, własność wyrażoną w ustępie (B) lub (C), to mamy na całej płaszczyźnie

(III') $$|a_0| \leq G.$$

§. 9. O ilorazie $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$.

Niech ν oznacza całkowitą, dodatną, dowolną, skończoną liczbę > 0 w ilorazie

(11) $$\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu} = \frac{a_0}{(x-x_0)^\nu} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{x-x_0} + $$
$$+ a_\nu + a_{\nu+1}(x-x_0) + \ldots\ldots,$$

który tutaj, uważając go za element funkcyi analitycznej $F(x)$, bliżej rozważymy pod względem średniej arytmetycznej w punktach $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$.

Obierzmy dowolną, dodatną, skończoną liczbę $m > 1$ i załóżmy najprzód $\nu > m$.

Gdy z liczb $\nu, \nu-1, \nu-2, \ldots 2, 1$ jedynie liczby $tm, (t-1)m, (t-2)m, \ldots, 2m, m$ są wielokrotnościami liczby m, pozostałe zaś ν, które przez ν_τ naznaczamy, posiadają mod. m najmniejsze odmienne reszty σ_τ, tak, że
$$\nu_\tau = r_\tau m - \sigma_\tau,$$

to równanie (11) tak możemy napisać:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^{\nu}} = \dfrac{a_{\nu-tm}}{(x-x_0)^{tm}} + \dfrac{a_{\nu-(t-1)m}}{(x-x_0)^{(t-1)m}} + \ldots + \dfrac{a_{\nu-m}}{(x-x_0)^{m}} & \text{(a)} \\ + \ldots + \dfrac{a_{\nu-\nu_\tau}}{(x-x_0)^{r}\tau^{m}}(x-x_0)^{\sigma}\tau + \ldots\ldots & \text{(b)} \\ + a_{\nu} + a_{\nu+1}(x-x_0) + a_{\nu+2}(1-x_0)^2 + \ldots\ldots & \text{(c)} \end{cases}$$

Kiedy $\nu < m$ to wyrazy (a) odpadają, a kiedy $\nu = m$, to z wyrazów (a) zastosuje tylko jeden

$$\frac{a_0}{(x-x_0)^m}.$$

W to równanie wstawmy za $(x-x_0)$ kolejno:

$$(x-x_0),\ (x-x_0)\varepsilon,\ (x-x_0)\varepsilon^2, \ldots,\ (x-x_0)\varepsilon^{m-1},$$

gdzie ε jest znowu jednym z pierwotnych pierwiastków równania $z^m - 1 = 0$, tedy po dodaniu tak otrzymanych m równań i podzieleniu sumy tej przez m, dostaniemy

1) w przypadku, kiedy $\nu > m$, związek:

$$(13)\quad P_{\nu}((x-x_0)^m) = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^{\nu}} + \frac{\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon)}{(x-x_0)^{\nu}\varepsilon^{\nu}} + \ldots + \frac{\mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{(m-1)})}{(x-x_0)^{\nu}\varepsilon^{(m-1)\nu}}\right],$$

gdzie

$$\mathfrak{P}_{\nu}((x-x_0)^m) = \frac{a_{\nu-tm}}{(x-x_0)^{tm}} + \frac{a_{\nu-(t-1)m}}{(x-x_0)^{(t-1)m}} + \ldots + \frac{a_{\nu-m}}{(x-x_0)^m} + a_{\nu} + a_{\nu+m}(x-x_0)^m + \ldots\ldots$$

jest sumą wszystkich tych wyrazów ilorazu $\dfrac{\mathfrak{P}(x-x)^m}{(x-x_0)^{\nu}}$, których wykładniki λ bez względu na znak są $\equiv 0 \pmod{m}$, jest więc wydzielonym szeregiem mod. m z tegoż ilorazu.

2) Kiedy $\nu < m$, to $P_{\nu}((x-x_0)^m$ jest szeregiem potęgowym

$$(14)\quad \mathfrak{P}_{\nu}((x-x_0)^m = a_{\nu} + a_{\nu+m}(x-x_0)^m + a_{\nu+2m}(x-x_0)^{2m} + \ldots\ldots,$$

a wreszcie kiedy

3) $\nu = tm$, to związek (13) ma postać

$$(15)\quad P_{tm}((x-x_0)^m = \frac{1}{m}\cdot\frac{\mathfrak{P}(x-x_0) + \mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon) + \ldots + \mathfrak{P}((x-x_0)\varepsilon^{m-1})}{(x-x_0)^{tm}},$$

gdzie

$$P_{tm}((x-x_0)^m) = \frac{a_0}{(x-x_0)^{tm}} + \frac{a_m}{(x-x_0)^{(t-1)m}} + \dots + \frac{a_{(t-1)m}}{(x-x_0)^m}$$
$$+ a_{tm} + a_{(t+1)m}(x-x_0)^m + a_{(t+2)m}(x-x_0)^{2m} + \dots .$$

W przypadku 1-szym i 3-cim mają wydzielone szeregi $P_\nu((x-x_0)^m)$, $P_{tm}((x-x_0)^m)$ mod. m tylko skończoną ilość wyrazów z odjemnymi wykładnikami, a stąd wynika, że kiedy dany szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada koło zbieżności

(α) $$|x-x_0| < R \text{ —}$$

to owe wydzielone szeregi mają zakres zbieżności

(β) $$0 < |x-x_0| < R',$$

gdzie $R' \geqq R$ być może.

W przypadku 2-gim przeciwnie ma wydzielony szereg potęgowy $\mathfrak{P}_\nu((x-x_0)^m)$ koło zbieżności

(γ) $$|x-x_0| < R',$$

gdzie znowu $R' \geqq R$ być może. Zakresem zbieżności ilorazu $\dfrac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ jest

(δ) $$0 < |x-x_0| < R.$$

Niech S_0 będzie dowolnym punktem leżącym w zakresie (δ); tedy wartości

$$\frac{\mathfrak{P}(S_0-x_0)}{(S_0-x_0)^\nu} = \mathfrak{W}_0, \quad \frac{\mathfrak{P}((S_0-x_0)\varepsilon)}{(S_0-x_0)^\nu\varepsilon^\nu} = \mathfrak{W}_1, \dots, \quad \frac{\mathfrak{P}((S_0-x_0)\varepsilon^{m-1})}{(S_0-x_0)^\nu\varepsilon^{\nu(m-1)}} = \mathfrak{W}_{m-1}$$

są wartościami ilorazu w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ należącemi mod. m do S_0 i wtedy mamy:

(Ia) $$\frac{\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_1 + \dots + \mathfrak{W}_{m-1}}{m} = \begin{cases} P_\nu((x-x_0)^m)_{x=S_0} & \text{w przyp. 1-szym} \quad (\alpha) \\ \mathfrak{P}_\nu((x-x_0)^m)_{x=S_0} & \text{„ „ 2-gim} \quad (\beta) \end{cases}$$

Gdy $R' > R$, to ten związek jeszcze i w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ mieszczących się w pierścieniu $R \leqq |x-x_0| < R'$ ma znaczenie z tem zastrzeżeniem, że wtedy $\mathfrak{W}_0, \mathfrak{W}_1, \dots, \mathfrak{W}_{m-1}$ oznaczają wartości funkcyi $F(x)$ otrzymane po drogach przystających.

W przypadku 3-cim mamy $\nu = tm$, a gdy $W_0, W_1, \dots, W_{m-1}$ są wartościami samego szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \dots, S_{m-1}$ leżących w R lub wartościami funkcyi $f(x)$ nim określonej, uzyskanemi

w S_0, S_1, ..., S_{m-1} drogami przystającemi (gdy S_0, S_1, ..., S_{m-1} leżą już w pierścieniu $R \leqq | x-x_0 | < R'$), przeto mamy związek

$$P_{tm}((x-x_0)^n)_{x=S_0} = \frac{W_0 + W_1 + \ldots + W_{m-1}}{m(S_0-x_0)^{tm}}. \qquad \text{(I b)}$$

To znaczy: Gdy ze szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$ określającego funkcyę $f(x)$ utworzymy iloraz $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^{tm}}$, $(t=1, 2\ldots)$ i z tego ilorazu wydzielimy szereg mod. m, to jego wartość w punkcie S_0 jest średnią arytmetyczną wartości $f(x)$ uzyskanych w punktach S_0, S_1,..., S_{m-1} po drogach przystających podzieloną przez $(S_0-x_0)^{tm}$.

Jeżeli poza koło (R') do punktów s_0, s_1, ..., s_{m-1} mieszczących się na kole $(r) > (R')$ przejść chcemy, to i szeregi po lewej stronie w związkach I a), I b), do jednego z tych punktów, n. p. do S_0, drogą przeprowadzić trzeba. Dostaniemy wtedy wartość

$$\mathfrak{W}(S_0)_{s_0} \qquad \text{(I c)}$$

przedstawiającą średnią arytmetyczną.

Jeżeli $R'=\infty$, to związki I a α), I a β), I b utrzymają się w punktach S_0, S_1, ..., S_{m-1} mieszczących się na dowolnem kole o środku x_0. Tym przypadkiem—$R' = \infty$— zajmiemy się szczegółowo w razie, gdy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ posiada pewne charakterystyczne własności.

Widzieliśmy w §. 6, jaki wpływ na średnią arytmetyczną (mod. m) wartości funkcyi $f(x)$ miał jej element $\mathfrak{P}(x-x_0)$, posiadający wprawdzie wolny wyraz a_0, ale pozbawiony zresztą wszystkich wykładników $\lambda \equiv 0$ (mod. m). Przyjmijmy więc, że i tu mamy taki szereg i że z niego tworzymy iloraz $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^{tm}}$. Wtedy wydzielony szereg mod. m zredukuje się do wymiernej funkcyi $\frac{a_0}{(x-x_0)^{tm}}$, a związek (I b) otrzyma postać:

$$\left.\frac{a_0}{(x-x_0)^{tm}}\right]_{x=S_0} = \frac{W_0 + W_1 + \ldots + W_{m-1}}{m(S_0-x_0)^{tm}}. \qquad \text{(I d)}$$

Widocznie mamy tutaj $R' = \infty$.

Niech $\mathfrak{P}(x-x_0)$ — po obraniu pewnej liczby ν — nie posiada wykładników: ν, $m+\nu$, $2m+\nu$, ..., a więc wykładników $\lambda \equiv \nu$ (mod. m) z wyjątkiem wykładnika $hm+\nu$. Wtedy iloraz $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^{\nu}}$ oprócz wy-

razu $a_{hm+\nu}(x-x_0)^{hm}$ — nie posiada dodajników o wykładnikach $\lambda \equiv 0$ (mod. m) i wtedy dostaniemy związek:

$$a_{hm+\nu}(x-x_0)^{hm} = \frac{\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_1 + \ldots + \mathfrak{W}_{m-1}}{m}$$

gdzie $R' = \infty$.

W razie, kiedy $h = 0$, mieć będziemy

$$\text{(I d')} \qquad a_\nu = \frac{\mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_1 + \ldots + \mathfrak{W}_{m-1}}{m}$$

To znaczy: Gdy szereg potęgowy prócz wyrazu $a_\nu(x-x_0)^\nu$ nie posiada żadnych dodajników o wykładnikach $\lambda \equiv \nu$ (mod. m), to średnia arytmetyczna wartości funkcyi $F(x)$ w punktach $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ jest ilością stałą $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$ przy jakimkolwiek wieloboku foremnym $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$, mającym środek w x_0.

Rozważmy pod tym względem funkcyę wymierną, ułamkową $F(x)$ z jednem tylko ν-krotnem miejscem nieskończonościowem x_0, leżącem w skończoności i z n miejscami zerowemi (w skończoności), $n \lesseqgtr \nu$. W wyrażeniu:

$$F(x) = \frac{G(x)}{(x-x_0)^\nu}$$

jest więc $G(x)$ stopnia $n$go.

Gdy $n > \nu$, to mamy w otoczeniu punktu x_0:

$$(a)\quad F(x) = \frac{a_0}{(x-_0)^\nu} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{x-x_0} + a_\nu + a_{\nu+1}(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-\nu};$$

gdzie $n = \nu$, mamy

$$(b)\quad F(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^\nu} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{x-x_0} + a_\nu;$$

a gdy $n < \nu$, to

$$(c)\quad F(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^\nu} + \ldots + \frac{a_n}{(x-x_0)^{\nu-n}}.$$

Jeżeli w (a) obierzemy m równocześnie większe od ν i $n-\nu$, a w (b) weźmiemy $m > \nu$, to dostaniemy

$$\frac{F(S_0) + F(S_1) + \ldots + F(S_{m-1})}{m} = a_\nu,$$

w (c) zaś, obierając $m > \nu$, mieć będziemy

$$\frac{F(S_0) + F(S_1) + \ldots + F(S_{m-1})}{m} = 0.$$

$S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ są to punkty należące mod. m do S_0, a mieszczące się na dowolnem kole o środku w punkcie x_0.

Niech $P_\nu((x-x_0)^m)$ oznacza wydzielony szereg mod. m z ilorazu $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ czy to w równaniu (13) czy (14) albo (15), to wtedy, zatrzymując znaczenie wyrazów $W_0, W_1, \ldots, W_{m-1}$, mamy

$$|P_\nu((x-x_0)^m)_{x=S_0}| \leqq \frac{|W_0| + |W_1| + \ldots + |W_{m-1}|}{m\,|S_0-x_0|^\nu}. \qquad \text{(IIa)}$$

Gdy tutaj z ilości $|W_0|, |W_1|, \ldots, |W_{m-1}|$ największa jest $= G$, to mamy związek

$$|P_\nu((x-x_0)^m)_{x=S_0}| \,.\, |S_0-x_0|^\nu \leqq G. \qquad \text{(III a)}$$

Z równania (I a′) mamy w ten sposób związek

$$|a_\nu| \,.\, |S_0-x_0|^\nu \leq G.$$

To znaczy: Gdy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ — oprócz wyrazu $a_\nu(x-x_0)^\nu$ — nie posiada żadnych wyrazów o wykładnikach $\lambda \equiv \nu$ (mod. m), a G jest największą z bezwzględnych wartości funkcyi $f(x)$, określonej szeregiem w punktach $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$, to ta największa wartość G nie jest nigdy mniejsza od $|a_\nu|\,|x-x_0|^\nu$ w punkcie $x = S_0$.

§. 10. Warunki, pod jakimi zakres zbieżności (R') szeregu wydzielonego mod. m jest większym od (R).

Mamy tu bliżej jeszcze rozważyć warunki, pod jakimi można ze szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x-x_0)^\lambda$ o zakresie zbieżności (R) wydzielić szereg $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ o zakresie zbieżności $(R') > (R)$.

Posługując się znanem zresztą znamieniem zbieżności, jakiego w ostatnich czasach używał J. Hadamar w znakomitej swej pracy „Essai

sur l'étude des fonctions" [1]) zauważmy od pewnego k począwszy mnogość

$$(S_1) \qquad \sqrt[k]{|a_k|}\,,\quad \sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\,,\ \ldots\,,\quad \sqrt[n]{|a_n|}\,,\ \ldots..$$

Jeżeli począwszy od pewnego dostatecznie wielkiego n [z opuszczeniem oczywiście tych $\sqrt[n+\lambda]{|a_{n+\lambda}|}$, które są zerami, które się więc odnoszą do spółczynników $a_{n+\lambda} = 0$] ilości (S_o) wciąż malejąc lub rosnąc, zbliżają się do pewnej skończonej granicy l tak, że mamy

$$(\alpha_1) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l\,,$$

to wtedy szereg $\mathfrak{P}(x-x_o)$ ma promień zbieżności

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Szereg $\mathfrak{P}_o((x-x_o)^m)$ ma spółczynniki a_o, a_m, a_{2m}, ...; do niego należy analogiczna z (S_1) mnogość

$$(S_2) \qquad \sqrt[k]{|a_{mk}|}\,,\quad \sqrt[k+1]{|a_{m(k+1)}|}\,,\ \ldots\,,\quad \sqrt[n]{|a_{mn}|}\,,\ \ldots..,$$

a ta mieszcząc się w (S_1) musi posiadać własność, że granica

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_{mn}|} = l''$$

będzie skończoną i oznaczoną. Wtedy wydzielony szereg mod. m — gdy go za szereg argumentu $(x-x_o)^m$ uważamy — ma promień zbieżności

$$|x-x_o|^m = R'' = \frac{1}{l''} = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_{nm}|}}\,,$$

a jako szereg argumentu $(x-x_o)$ jest zbieżny w kole (R') o promieniu

$$R' = \frac{1}{l'} = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[nm]{|a_{nm}|}}\,.$$

Weźmy $R' > R$, zastrzegając, że różnica $R-R$ nie ma być nieskończenie małą, to wtedy, od pewnego, dostatecznie wielkiego n poczynając, musi być ciągle

---

[1]) Journal de mathématiques pures et appliquées. Rok 1892, str. 101.

$$\frac{1}{\sqrt[mn]{|a_{mn}|}} > \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

czyli musi być

$$|a_{nm}| < |a_n|^m.$$

Stąd wnosimy, że

Dla takich liczb m szeregu naturalnego $2, 3, 4, \ldots$ ale skończonych, dla których od pewnego dostatecznie wielkiego n poczynając — sprawdza się bezustannie nierówność (α), mamy $R' > R$.

§. 11. Znaczenie przypadku: $m = \infty$.

Bardzo ciekawym jest przypadek graniczny: $m = \infty$, a więc zbadanie wyrazu

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_0((x-x_0)^m) = a_0 + \lim_{m=\infty} [a_m (x-x_0)^m + a_{2m}(x-x_0)^{2m} + \ldots]$$

$$= a_0 + P_\infty = K_\infty$$

nie tyle w punktach x zawartych w kole (R), ile raczej rozstrzygnięcie pytania, co takie wyrażenie $a_0 + P_\infty$, jako granica pewnej analitycznej funkcyi, wyznacza w punktach poza kołem (R) leżących?

Gdy x leży w kole (R), to widocznie $a_0 + P_\infty = a_0$, gdyż P_∞, jako granica sumy nieskończenie dalekich wyrazów szeregu $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, musi być w zakresie zbieżności tego szeregu zerem.

Zakładając $|x - x_0| < R$, połóżmy:

$$x - x_0 = \rho e^{\varphi i}, \; \rho < R, \; \varphi = (0 \ldots 2\pi),$$

to ponieważ $m = \infty$, możemy przyjąć:

$$\varphi = \frac{2\pi}{m} t \Big\}_{m=\infty}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \text{ in infinitum}$$

wtedy mamy

$$K_\infty = a_0 + P_\infty = a_0 + \lim_{m=\infty} [a_m \rho^m + a_{2m} \rho^{2m} + \ldots].$$

Aby można było zbadać wartość tego wyrażenia przy $\rho > R$ przynajmniej w szczególnym przypadku, przyjmijmy, że szereg $a_0 + a(x-x_0)^m + a_{2m}(x-x_0)^{2m} + \ldots$ dla pewnego skończonego m jest elementem funkcyi analitycznej $\varphi(x, m)$ nieograniczonego argumentu x i pa-

rametru m, oraz że się ta analityczna funkcya φ od pewnego dostatecznie wielkiego m statecznie utrzymuje. W takim razie jest

$$K_\infty = a_o + P_\infty = \lim_{m=\infty} \varphi(\rho, m),$$

a wartość tej granicy dla obranego $\rho > R$ jest zarazem wartością, jaką na całem kole $(\rho) > (R)$ o środku x_o wyznacza K_∞.

§. 12. Szczególne przypadki wydzielonego szeregu przy $m = \infty$.

W rozdziale II-gim zobaczymy, że znaczenie wartości, jakie K_∞ daje w punktach poza kołem (R), pozostaje w ścisłym związku z temi twierdzeniami Cauchy'ego, w których się ten matematyk posługiwał całkami określonemi zmiennej urojonej. Lecz i w ogólniejszym przypadku okaże się, że granice kilku wydzielonych szeregów będą również ściśle związane ze wspomnianemi twierdzeniami.

Tutaj nadmienimy jeszcze:

Na całej płaszczyźnie argumentu x jest

$$P_\infty = 0,$$

1) gdy $\mathfrak{P}(x-x_o)$ jest szeregiem bezustannie zbieżnym;

2) gdy z $\mathfrak{P}(x-x_o)$ daje się wydzielić szereg mod. m_1 bezustannie zbieżny, a $m = \infty$ użyjemy w formie $[q\, m_1]_{q=\infty}$;

3) gdy $\mathfrak{P}(x-x_o)$ posiada wykładniki $\lambda \equiv 0$ (mod. m_1) tylko do skończonej granicy $(t-1)m_1$, a $m = \infty$ użyjemy w formie $[q\, m_1]_{q=\infty}$.

W tych przypadkach jest więc

$$K_\infty = \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_o((x-x_o)^m) = a_o.$$

Dla ilorazu $\dfrac{\mathfrak{P}(x-x_o)}{(x-x_o)^\nu}$, (gdzie ν skończone) granicą wydzielonego szeregu mod. $m=\infty$ jest zawsze zwykły szereg potęgowy

$$\lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_\nu((x-x_o)^m) = a_\nu + \lim_{m=\infty} [a_{\nu+m}(x-x_o)^m + a_{\nu+2m}(x-x_o)^{2m} + \dots]$$

który nazwiemy

$$K_{\nu,\infty} = a_\nu + P_{\nu,\infty}.$$

W przypadkach analogicznych do tych, które nam powyżej dały $P_\infty = 0$, mamy i tu $P_{\nu,\infty} = 0$, a więc

$$K_{\nu,\infty} = \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_\nu((x-x_o)^m) = a_\nu.$$

Jeżeli wreszcie z $\mathfrak{P}(x-x_0)$ wydzielić się daje szereg potęgowy $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^{m'})$ o kole zbieżności $(R') > (R)$, a $m_1 = \infty$ użyjemy w formie $[qm_1]_{q=\infty}$, to wtedy będzie $K_\infty = \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_0((x-x_0)^m) = a_0$ tylko w kole (R').

Podobnie, kiedy z ilorazu $\dfrac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ daje się wydzielić szereg $P_\nu((x-x_0)^{m'})$ zbieżny w zakresie $0 < |x-x_0| < R'$, to używając $m=\infty$ w formie $[qm_1]_{q=\infty}$ mieć będziemy $K_{\nu,\infty} = \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_\nu((x-x_0)^m) = a_\nu$ tylko w kole (R').

ROZDZIAŁ II.

Część pierwsza.

Funkcye jednoznaczne.

§. 13. O szeregu wydzielonym mod. $m=\infty$ z iloczynu $(x-x_0)f(x-x_0)$. Wprowadzenie całek zamkniętych.

Dany szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ o kole zbieżności (R) niech będzie elementem funkcyi analitycznej jednoznacznej $f(x-x_0)$. Iloczyn $(x-x_0)f(x-x_0) = (x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0)$ nie posiada wolnego wyrazu, a wskutek tego, jeśli $|x-x_0| < R$, a m zdąża w dowolny sposób do nieskończoności, mieć ciągle będziemy wyraz K_∞ iloczynu $(x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0)$ o wartości $= 0$. Stosując zaś związek I′ ((§. 4) dostaniemy:

$$0 = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{W}_\nu; \tag{1}$$

$\overline{W}_\nu$ są tu wartościami funkcyi $(x-x_0)f(x-x_0)$ w punktach $S_0, S_1, \ldots S_{m-1}$ $(m=\infty)$ na kole $(r) < (R)$.

Połóżmy $(x-x_0) = re^{\varphi i}$ i pomnóżmy licznik i mianownik tej sumy przez $d\varphi . i = \left[\dfrac{2\pi i}{m}\right]_{m=\infty}$, to trzeba położyć $[m . d\varphi . i]_{m=\infty} = 2\pi i$, a związkowi (1) dać postać:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i})\, r.e.^{\varphi i} d\varphi\, i$$

Połóżmy $x-x_0 = z$, to wtedy jest $r.e^{\varphi i} d\varphi i = dz$, tak, że ostatecznie mamy:

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(r)<(R)} f(z)\,dz=0.$$

Jestto znane twierdzenie Cauchyego, odnoszące się tutaj do koła (r) mniejszego od (R) i z niem współśrodkowego.

Chcąc wyjść poza koło (R), musimy tu przedewszystkiem podnieść jednę bardzo ważną okoliczność. Oto widzieliśmy przy końcu rozdziału I, że w niektórych przypadkach obierając $m=\infty$ w postaci $[qm_1]_{q=\infty}$ dostajemy w całem kole $(R') > (R)$, gdzie R' nawet nieskończenie wielkim być może, wyraz $K_\infty = a_0$. Że zaś tutaj wolny wyraz szeregu $(x-x_0)$ $\mathfrak{P}(x-x_0)$ jest zerem, przeto mielibyśmy, używając takiego właśnie $m=\infty$ w każdem kole (r) czyniącem zadość nierówności $(R) < (r) < (R')$, a mającem środek x_0, całkę

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(r)} f(z)\,dz=0$$

jako granicę sumy (1).

Atoli według Cauchyego taka całka jest równą sumie pozostałości (residuów) funkcyi $f(z)$ wewnątrz koła (r), a ta, mimo własności szeregu $(x-x_0)$ $\mathfrak{P}(x-x_0)$, że przy $m=[qm_1]_{q=\infty}$ jego K_∞ redukuje się do zera, nie potrzebuje być zerem.

Tak n. p. uważając funkcyę

$$f(x)=\mathfrak{P}(x)=x.\ \mathrm{cotg.}\ x=1-2\,S_2\,\frac{x^2}{\pi^2}-2\,S_4\,\frac{x^4}{\pi^4}-\ldots,$$

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots$$

widzimy, że szereg ten zbieżny jest w kole $(R)=(\pi)$, a $f(x)$ posiada w punktach $\pm\mu\pi$, $\mu=1, 2, 3, \ldots$ pozostałości $=+1$. Zakreślimy ze środka $x_0=0$ koło (ρ_μ) takie, że $\mu\pi < \rho_\mu < (\mu+1)\pi$, to na sumę pozostałości funkcyi $f(x)$ wewnątrz tego koła dostaniemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\rho_\mu)} f(x)\,dx=\sum_{(\rho_\mu)}\mathrm{Res.}\,f(x)=2\mu.$$

Tymczasem, gdybyśmy, utworzywszy

$$x\,\mathfrak{P}(x)=x-2\,S_2\,\frac{x^3}{\pi^2}-2\,S_4\,\frac{x^5}{\pi^4}-\ldots-$$

użyli granicy $m=[2q]_{q=\infty}$, mielibyśmy na całej płaszczyźnie $K_\infty=0$,

a dalej przy dowolnie wielkiem (ρ_μ) zawsze $\sum_{(\rho_\mu)} \text{Res.} f(x) = 0$, co być nie może.

Stąd wnosimy: Pojmując tu całkę określoną zmiennej urojonej jako granicę sumy (1) nie można liczby wyrazów tej sumy zwiększać do nieskończoności sposobem $m = [qm_1]_{q=\infty}$ [1]); sama zaś funkcya $f(z)$, której $(x-x_0)\mathfrak{P}(x-x_0$ przy takiem m posiada $K_\infty = 0$, nie potrzebuje (chociaż może) mieć $\Sigma \text{Res.} f(z) = 0$ wewnątrz dowolnego koła (r).

Równanie zatem $\sum_{(r)} \text{Res.} f(z) = 0$ nie charakteryzuje takiej funkcyi $f(z)$. Jej charakterystyką będzie raczej ta jej własność, że, gdy na kole (r), bez względu na to, czy takowe przez jej szczególne punkta przechodzi, czy nie, obierzemy punkta $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{qm_1}$, należące mod. qm_1 do S_0 i zgęszczać je będziemy w ten sposób, że się q zbliża do nieskończoności, dostajemy zawsze, na sumę wartości iloczynu $z \,.\, f(z)$ w tych punktach, zero.

Aby więc odpowiedzieć na pytanie postawione już w rozdziale I, a mianowicie: „co wyznacza K_∞ (tutaj szeregu $(x-x_0) \,.\, \mathfrak{P}(x-x_0)$) poza kołem zbieżności (R)?“ — załóżmy nasamprzód:

A) Wydzielony szereg $\mathfrak{P}'_0((x-x_0)^m)$ mod. m z iloczynu $(x-x_0)$ $\mathfrak{P}(x-x_0)$ jest tego rodzaju, iż od pewnego m począwszy, mamy zawsze

$$\mathfrak{P}'_0((x-x_0)^m) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Phi_\lambda(m)\,(x-x_0)^{\lambda m}, \tag{3}$$

a więc spółczynniki tego szeregu zależą statecznie w jednaki sposób od parametru m. Inaczej mówiąc: że istnieje funkcya $\varphi(\rho, m)$, o której mowa była w rozdziale I.

To założenie zatrzymując i odnosząc równanie (I''') (§. 7) do szeregu $(x-x_0) \,.\, \mathfrak{P}(x-x_0)$ nawet i wtedy, kiedy już mamy $m = \infty$, napiszemy takowe w postaci:

$$\overline{W}(S_0)\, s_{0, m=\infty} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m-1} \overline{W}_{\nu}, s_\nu. \tag{4}$$

Założywszy jednoznaczność funkcyi możemy i musimy zmienność

---

[1]) W rachunku całkowym (por. Serret, Harnak) dowodzi się, że całki określone zmiennej rzeczywistej obliczać można, biorąc za podstawę dowolny podział zakresu całkowania. Widocznie całki tu rozważane zachowują się pod tym względem odmiennie.

dróg s_ν uważać za obojętną i prawą stronę ostatniego związku określić jako

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,.\,dz = \sum_{(r)} \text{Res.}\, f(z), \tag{5}$$

gdzie (r) jest kołem większem od (R), a mieszczącem na sobie punkty $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ zgęszczone do nieskończoności.

Wyrażenie $\overline{W}(S_0)\, s_{0, m=\infty}$, pojmując formalnie, uważać trzeba za przeprowadzenie szeregu $K_\infty = \lim_{m=\infty}[a_{m-1}(x-x_0)^m + a_{2m-1}(x-x_0)^{2m} + \ldots]$ do punktu S_0. Atoli że takie przeprowadzenia są jednakiej wartości we wszystkich punktach $S_0, S_2, \ldots, S_{m-1}$, a tutaj (przy $m=\infty$) zajęły one już cały okrąg (r), przeto $\overline{W}(S_0)\, s_{0, m=\infty}$ uważać trzeba za wartość $\Omega(\xi_r)$ jaką K_∞ definiuje na całem kole (r) czyli we wszystkich punktach ξ_r, tegoż koła. Granicę $m=\infty$ można przy obliczaniu $\Omega(\xi_r)$, przy założeniu A, ominąć w sposób następujący: Przy skończonem m przeprowadzamy szereg $\mathfrak{P}'_0((x-x_0)^m)$ do otoczenia któregokolwiek punktu ξ_r koła (r) i kładziemy w niem potem $x=r_\nu$ oraz $m=\infty$.

Otrzymujemy więc:

$$\Omega(\xi_r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\, dz = \sum_{(r)} \text{Res.}\, f(z),$$

a nazywając $\Omega(\xi_r)$ „przeprowadzeniem szeregu K_∞", mamy twierdzenie:

Przeprowadzenie szeregu K_∞ odnoszącego się do $(x-x_0)\,.\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ ma w dowolnym punkcie ξ_r koła $(r) > (R)$ wartość sumy pozostałości funkcyi $f(z)$ zawartych w (r).

§. 14. Zmiana wartości wyrażenia $\Omega(\xi_r)$ ze zwiększającem się kołem (r). Nowe określenie pozostałości w kole (r).

Aby zbadać zmianę wartości przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)$ kiedy się zwiększa koło (r), przyjmijmy, że jednoznaczna funkcya $f(z)$ posiada punkty szczególne

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	o bezwzględnej	wartości		R
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$	„	„	„	r_1
$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$	„	„	„	r_2
$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \ldots$	„	„	„	r_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

gdzie $R < r_1 < r_2 < r_3, \ldots$ oraz że między temi kołami nie ma już żadnych punktów szczególnych. Prócz tych kół nakreślmy jeszcze ze środka x_0

$$
\begin{array}{llll}
\text{koło} & (\rho_1) & \text{takie, że} & R < \rho_1 < r_1 \\
\text{"} & (\rho_2) & \text{"} \quad \text{"} & r_2 < \rho_2 < r_2 \\
\text{"} & (\rho_3) & \text{"} \quad \text{"} & r_2 < \rho_3 < r_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots,
\end{array}
$$

to wtedy mamy:

$$
\begin{aligned}
\Omega(\xi_{\rho_1}) &= \sum_{(\rho 1)} \text{Res.} f(z) = H_1 \\
\Omega(\xi_{\rho_2}) &= \sum_{(\rho 2)} \text{Res.} f(z) = H_2 \\
\Omega(\xi_{\rho_3}) &= \sum_{(\rho 3)} \text{Res.} f(z) = H_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a stąd wynika: Przeprowadzenie $\Omega(\xi_r)$ ma we wszystkich punktach w pierścieniu

$$
\begin{array}{llll}
 & (R \;\ldots\ldots\; r_1) & \text{wartość} & H_1 \\
\text{w} & (r_1 \;\ldots\ldots\; r_2) & \text{"} & H_2 \\
\text{w} & (r_2 \;\ldots\ldots\; r_3) & \text{"} & H_3 \\
\vdots & \quad\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Na samych zaś kołach (R), (r_1), (r_2), ... jest $\Omega(\xi_r)$ (w ogólności gdy H_1 H_2, H_2 H_3, są od siebie różne) bez znaczenia.

W ten sposób dostajemy tutaj zupełnie nową definicyę sumy pozostałości we wnętrzu koła (r) odmienną od jej określenia jako sumy spółczynników przy pierwszych odjemnych potęgach argumentu albo za pomocą całki zamkniętej. Ta nowa definicya wynika wprost ze znajomości elementu danej funkcyi analitycznej.

Weźmy n. p. szereg potęgowy:

$$
\mathfrak{P}(x) = 2 + (1+2)\,x + (1+2^2)\,x^2 + (1+2^3)\,x^3 + \ldots\ldots = f(x)
$$

o kole zbieżności $(R) = (\frac{1}{2})$.

Z szeregu $x \,.\, \mathfrak{P}(x)$ wydzielony szereg mod. m ma postać

$$(1+2^{m-1})\,x^m+(1+2^{2m-1})\,x^{2m}+(1+2^{3m-1})\,x^{3m}+\ldots$$

i jest zbieżny również w kole $(R')=(\frac{1}{2})$; a przy każdem m ma formę (3). Z drugiej strony jest on znowu elementem analitycznej funkcyi

$$\varphi(\rho, m)=\frac{\rho^m}{1-\rho^m}+\frac{1}{2}\,\frac{(2\rho)^m}{1-(2\rho)^m} \text{ (zob. rozdz. I)},$$

a gdy $m=\infty$, to mamy $\varphi=0$ w kole $|x|<\frac{1}{2}$, $\varphi=-\frac{1}{2}$ w pierścieniu $\frac{1}{2}<|x|<1$, zaś $\varphi=-\frac{3}{2}$ w zakresie $1<|x|<\infty$. Inaczej:

$$K_\infty=\sum_{(r)}\text{Res. } f(x)=0, \quad r<\tfrac{1}{2}$$

$$\Omega(\xi_{\rho_1})=\sum_{(\rho)}\text{Res. } f(x)=-\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}<\rho_1<1.$$

$$\Omega(\xi_{\rho_2})=\sum_{(\rho)}\text{Res. } f(x)=-\tfrac{3}{2}, \quad 1<\rho_2<\infty.$$

§. 15. Badanie ogólniejszej formy iloczynu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$.

B) Załóżmy teraz, że $\mathfrak{P}_0((x-x_0)^m)$ należąc do $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0$ nie utrzymuje się statecznie w postaci (3). Wtedy może się zdarzyć, że cały zbiór wykładników λ szeregu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ rozpada się na skończoną (lub nieskończoną) ilość mnogości:

a) $\lambda'_0,\ \lambda'_1,\ \lambda'_2, \ldots$ in inf.

b) $\lambda''_0,\ \lambda''_1,\ \lambda''_2, \ldots$ in inf.

c) $\lambda'''_0,\ \lambda'''_1,\ \lambda'''_2 \ldots$ in inf.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

o własnościach następujących:

1) Żaden wykładnik jednej mnogości nie mieści się w mnogości drugiej.

2) Utworzone szeregi:

$$(x-x_0)\,\mathfrak{P}'(x-x_0)=\sum_{\alpha=0}^{\infty} a'_\alpha (x-x_0)^{\lambda'_\alpha}, \quad (x-x_0)\,\mathfrak{P}''(x-x_0)=\sum_{\alpha=0}^{\infty} a''_\alpha\,(x-x_0)^{\lambda''_\alpha}$$

(d)
$$(x-x_0)\,\mathfrak{P}'''(x-x_0)=\sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha'''(x-x_0)^{\lambda''_\alpha}, \ldots\ldots$$

gdzie a'_α, ... należą do wykładników λ'_α, ... w szeregu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$

są już takie, że wydzielone z nich szeregi od pewnych dostatecznie wielkich modułów poczynając, zachowują statecznie postać (3).

3-o) $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)=(x-x_0)\,\mathfrak{P}'(x-x_0)+(x-x_0)\,\mathfrak{P}''(x-x_0)+(x-x_0)\,\mathfrak{P}'''(x-x_0)+\ldots$

albo: $$\mathfrak{P}(x-x_0)=\mathfrak{P}'(x-x_0)+\mathfrak{P}''(x-x_0)+\mathfrak{P}'''(x-x_0)$$

albo wreszcie:

(*e*) $$f(z)=f'(z)+f''(z)+f'''(z)+\ldots,$$

gdzie $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... są to analityczne funkcye określone szeregami (*d*). Równanie (*e*) jest już właśnie wynikiem własności 1.

Wskutek równania (*e*) mieć będziemy w dowolnem kole $(r) > (R)$

$$\sum_{(r)} \text{Res.}\, f(z)=\sum_{(r)} \text{Res.}\, f'(z)+\sum_{(r)} \text{Res.}\, f''(z)+\sum_{(r)} \text{Res.}\, f'''(z)+\ldots.$$

Niechże teraz wyrazy k'_∞, k''_∞, k'''_∞, ... szeregów (*d*) mają na punktach ξ_r, koła (r), przeprowadzenia $\Omega'(\xi_r)$, $\Omega''(\xi_r)$, $\Omega'''(\xi_r)$, ... to mamy:

$$\sum_{(r)} \text{Res.}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,dz=\Omega'(\xi_r)+\Omega''(\xi_r)+\Omega'''(\xi_r)+\ \ldots..$$

W takim związku pozostają przeprowadzenia Ω', Ω''; .... szeregów, których suma daje $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$, ze sumą pozostałości samej funkcyi $f(z)$.

Niech np. szereg $u=\sum_\lambda x^\lambda$ zawiera wszystkie wykładniki parzyste $0, 2, 4, \ldots$, z nieparzystych zaś tylko te, które mają kształt $(4n-1)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Mamy wtedy:

$$u=[1+x^2+x^4+\ldots]+[x^3+x^7+x^{11}+\ldots]=u'+u''=f(z)$$

oraz

$$x\,.\,u=[x+x^3+x^5+\ldots]+[x^4+x^8+x^{12}+\ldots]=xu'+xu''.$$

Z iloczynu $x.u$ wydzielony szereg mod. $2n+1$ dostajemy w postaci:

$$x\,.\,u'_{2n+1}=\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2(2n+1)}},$$

dla modułu znowu parzystego $4n$ mamy:

$$x\,u''_{4n}=\frac{x^{4n}}{1-x^{4n}}.$$

Wydzielone więc szeregi są tu widocznie inne przy modułach nieparzystych, a inne przy parzystych. Gdybyśmy zatem moduł m zwiększali do nieskończoności według liczb nieparzystych, to doszlibyśmy,

zakładając $r > 1$, do $\Omega(\xi_r) = \Omega'(\xi_r) = 0$ szeregu $x u'$, a nie szeregu $x.u$ należącego do danej funkcyi $f(z)$. Podobnie zwiększając parzyste m do nieskończoności, otrzymamy: $\Omega(\xi_r) = \Omega''(\xi_r) = -1$, odnoszące się do $x u''$, a nie do iloczynu xu. Z tego powodu trzeba położyć:

$$\sum_{(r)} \text{Res.} f(z) = \int_{(r)} f(z)\, dz = \Omega'(\xi_r) + \Omega''(\xi_r) = -1$$

i to jest prawdziwa wartość sumy pozostałości danej funkcyi $f(z)$ w kole (r).

Ograniczając się w dalszych poszukiwaniach do założenia (B), możemy i będziemy się odtąd w teoryi zajmować wyłącznie takimi szeregami, z których wydzielone szeregi mod. m od pewnego m począwszy statecznie zatrzymują formę (3); w twierdzenie bowiem wynikające ze założenia (B) wchodzą tylko $\Omega'(\xi_r)$, . . . takich szeregów.

§. 16. Badanie samego szeregu $\mathfrak{P}(x-x_0)$.

Zakładając to, co dopiero powiedzieliśmy o samym szeregu danym $\mathfrak{P}(x-x_0)$, łatwo będziemy mogli podobnemi metodami związać jego $K_\infty = a_0 + P_\infty$ i $\Omega(\xi_r)$ z całkami Cauchyego. $\mathfrak{P}(x-x_0)$ niech określa funkcyą $\varphi(x \mid x_0) = f(x)$. Gdy $(x-x_0) < R$, to zawsze jest $P_\infty = 0$ a więc $K_\infty = a_0 = f(x_0)$, a stosując tu równanie (I'), roz. I, mieć będziemy:

$$a_0 = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} W_\nu$$

czyli
$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(x)\, dx}{x-x_0}, \quad r < R,$$

gdzie $f(x_0)$ jest pozostałością ilorazu $\dfrac{f(x)}{x-x_0}$ w punkcie x_0. Obierzmy koło $(r) > (R)$, to według Cauchyego będzie:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{f(x)}{x-x_0} = \sum_{(r)} \text{Res.} \frac{f(x)}{x-x_0}.$$

Stąd — gdy przez $\Omega(\xi_r)$ rozumieć będziemy i tu „przeprowadzenie" wyrazu K_∞ do jakiegoś punktu ξ_ρ koła (ρ) — otrzymamy:

$$\Omega(\xi_\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\rho)} \frac{f(x)\, dx}{x-x_0} = \sum_{(r)} \text{Res.} \frac{f(x)}{x-x_0} \tag{8}$$

Takie wartości określa $K_x = a_0 + \lim_{m=\infty} [a_m (x-x_0)^m + \ldots]$ na kołach $(\rho) > (R)$, spółśrodkowych z (R).

Jeżeli w równaniu (8) po obydwu jego stronach odejmiemy wyraz $a_0 = f(x_0)$, który właśnie jest pozostałością punktu x_0 w sumie $\sum\limits_{(\rho)}$, dostaniemy na przeprowadzenie reszty $P_\infty = \lim_{m=\infty} [a_m (x-x_0)^m + \ldots]$ sumę $\sum\limits_{(\rho)}' \text{Res.} \frac{f(x)}{x-x_0}$, gdzie kreska przy Σ ma przypominać, że pozostałość punktu x_0 trzeba opuścić.

Funkcya n. p.

$$f(x) = x.\operatorname{cotg} x = 1 - 2\,S_2 \frac{x^2}{\pi^2} - 2\,S_4 \frac{x^4}{\pi^4} - \ldots$$

jest zbieżną w kole $(R) = (\pi)$ i posiada w punktach szczególnych $\pm \mu\,\pi$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ pozostałości $= +1$.

Iloraz $\frac{f(x)}{x}$ ma w punkcie $x = x_0 = 0$ również pozostałość $= +1$. Stąd wynika, że

$$K_\infty = 1 - 2 \lim_{m=\infty} \left[S_{2m} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2m} + S_{4m} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{4m} + \ldots \right]$$

ma w każdem kole $(r) < (\pi)$ wartość $= 1$, a wewnątrz każdego koła (ρ_μ) takiego, że $\mu\,\pi < \rho_\mu < (\mu+1)\,\pi$ daje wartość

$$\Omega(\xi\rho_\mu) = 1 + 2\,\mu,\quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= \sum_{(\rho_\mu)} \text{Res. cotg. } x.$$

Aby to sprawdzić, zauważmy przy skończonem m, szereg:

$$\mathfrak{P}_0 (x^{2m}) = 1 - 2 \left[S_{2m} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2m} + S_{4m} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{4m} + \ldots \right]$$
$$= 1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{2m} + \left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{4m} + \ldots \right].$$

Jest on elementem funkcyi

$$1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{2m}}{1 - \left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{2m}}.$$

Z niej dostajemy dla $|\,x\,| < \pi$:

$$K_\infty = 1 - 2.\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{2m}}{1-\left(\frac{x}{\nu\pi}\right)^{2m}};$$

a gdy założymy $\mu\pi < |x| < (\mu+1)\pi$, to w sumie $\sum_{\nu=1}^{\mu}$ dostaną wyrazy o skaźniku $\nu = 1, 2, \ldots \mu$ wartość $=-1$, wszelkie dalsze wartości $=0$, tak, że będzie

$$\Omega(\xi\rho_\mu) = 1 + 2\mu,$$

jak to wprost wywnioskowaliśmy z funkcyi $f(x)$.

Przechodząc do $m=\infty$ w ilorazie $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ mamy przy $(r) < (R)$ $K_{\nu,\infty} = a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$ i wtedy związki I*a*, I*b* (§. 9) dają

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)_{\nu+1}},\ (r) < (R).$$

Jeżli założymy $(r) > (R)$, to wtedy wyraz I*c* (§. 9) ma znaczenie przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)_\nu$ wyrażenia $K_{\nu,\infty}$, tak — że mieć będziemy

(9) $$\Omega(\xi_r)_\nu = \sum_{(r)} \mathrm{Res.}\ \frac{f(x)}{(x-x_0)^{\nu+1}},\ (r) > (R).$$

To znaczy:

Przeprowadzenie wyrażenia $K_{\nu,\infty}$ ilorazu $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$, w którym $\mathfrak{P}(x-x_0)$ określa funkcyą jednoznaczną $f(x)$, daje w dowolnym punkcie ξ_r koła $(r) > (R)$ sumę pozostałości funkcyi $\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\nu+1}}$ w wnętrzu koła (r).

§. 17. O największej bezwzględnej wartości funkcyi na okręgach współśrodkowych z kołem zbieżności danego jej elementu.

Zajmijmy się teraz związkiem III (§. 8). Załóżmy, że: $|x-x_0| = r < R$, nazwijmy g największą z bezwzględnych wartości, jakie na całem kole (r) przybiera szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x-x_0)$ i weźmy $m=\infty$, to wtedy ze związku tego dostaniemy

$$| a_0 | \leqq g, \tag{10}$$

gdyż lewa strona w III (§. 8) będzie to $K_\infty = a_0$ szeregu danego.

W ten sposób mamy bardzo prosty dowód twierdzenia, jakiem się Weierstrass tylokrotnie w swej teoryi funkcyi posługuje.

Związek (10) postarajmy się przenieść poza koło (R). W tym celu wróćmy do związku I''' rozd. I; po prawej stronie załóżmy $m = \infty$, a w miejsce ilości $W_{0\,s_0}$, $W_{1\,s_1}, \ldots$ położmy największą z ich bezwzględnych wartości. Ponieważ i lewą stronę trzeba wziąć w bezwzględnej wartości, przeto z uwagi, że dla $| x - x_0 | = r > R$ jest $| W(S_0) s_{0, m=\infty} | = | \Omega(\xi_r) |$, mamy:

$$| \Omega(\xi_r) | \leqq g \text{ albo}$$

$$\left| \sum_{(r)} \text{Res.} \frac{f(x)}{x - x_0} \right| \leqq g, \; (r) > (R)$$

W ten sposób przenosi się związek (10) poza koło (R); wysłowić to można twierdzeniem:

Gdy funkcya jednoznaczna $f(x)$ daną jest elementem $\mathfrak{P}(x - x_0)$, a na kole $(r) > (R)$ o środku x_0 posiada $| f(x) |$ największą wartość g, to owo g nie jest nigdy mniejsze od bezwzględnej wartości sumy pozostałości ilorazu $\dfrac{f(x)}{x - x_0}$. Tę sumę otrzymać można ze samego elementu tworząc $\Omega(\xi_r)$.

Przechodząc tutaj z m skończonego do $m = \infty$, a więc z twierdzeń arytmetycznych rozdziału I do związków (10) i (11), nie używamy całkowania. Przypuśćmy że $\mathfrak{P}(x - x_0)$ przy użyciu $m = [q m_1]_{q=\infty}$ posiada $K_\infty = a_0$ w kole $(R') > (R)$. Przez ciągłe zwiększanie liczby q w iloczynie $q m_1$ możemy się jednym punktem układu $S_0, S_1, \ldots S_{qm-1}$ dowolnie zbliżyć do tego punktu, w którym $| f(x) |$ posiada właśnie wartość największą g. Prawa zatem strona związku I''' rozdziału I przy takiem $m = \infty$ da także wartość g. Lewa strona będzie $= a_0$ przy takiem m w całem kole (R'), a stąd wynika:

Gdy $\mathfrak{P}(x - x_0)$ dla wartości $m = \infty = [q m_1]_{q=\infty}$ posiada $K_\infty = a_0$ w kole $(R') > (R)$, to związek $| a_0 | \leqq g$ utrzymuje się jeszcze w całem kole (R'), a więc i na wszelkich kołach (r) o środku x_0 zawartych między (R) a (R'). Oczywistą jest rzeczą, że oprócz tego zachodzi tu jeszcze zawsze i związek (11).

Szereg np.

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots$$

zbieżny w kole $(R)=(1)$, a będący elementem funkcyi $1+\frac{x}{1-x^2}$, posiada — gdy $m=[2q]_{q=\infty}$ — na całej płaszczyźnie $K_\infty=1$. Jeżeli więc na dowolnem kole (r) o środku $x=0$ wyznaczymy największą wartość g funkcyi $\left|1+\frac{x}{1-x^2}\right|$, to zawsze mieć będziemy $1 \leqq g$.

Podobnie z relacyi IIIa, rozd. I (§. 9), odnoszącej się do ilorazu $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ dostaniemy przy $m=\infty$:

$$|a_\nu|\,|x-x_0|^\nu \leqq g, \quad |x-x_0|=r<R,$$

jeźli zaś przyjmiemy $(r)>(R)$, to mieć będziemy:

$$|\Omega(\xi_r)_\nu|\, r^\nu = \left|\sum_{(r)} \text{Res.}\, \frac{f(x)}{(x-x_0)^{\nu+1}}\right| r^\nu \leqq g.$$

Gdy iloraz $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$ posiada $K_{\nu,\infty}=a_\nu$ w kole $(R')>(R)$, to mieć będziemy jeszcze i poza kołem (R), w całem kole (R'), związek (12) sprawdzony. Gdy np. po obraniu pewnego $\nu<n$ utworzymy ze szeregu

$$\mathfrak{P}(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\ldots+a_{2n}x^{2n}+b_1x+b_3x^3+b_5x^5+\ldots$$

o pewnem kole zbieżności iloraz:

$$\frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{2\nu}}=\frac{a_0}{x^{2n}}+\ldots+a_{2\nu}+\ldots+a_{2n}x^{2(n-\nu)}+ \text{ potęgi nieparzyste,}$$

to do niego w razie: $m=[2q]_{q=\infty}$, należy $K_{\nu,\infty}=a_{2\nu}$ na całej płaszczyźnie argumentu x. Stąd wynika, że mamy tutaj

$$|a_{2\nu}|\,|x|^{2\nu} \leqq g, \text{ kiedy } |x|=r \text{ dowolne i } \nu<n.$$

Część druga.

Funkcye wieloznaczne.

§. 18. Określenie wyrażeń K_∞ i $\Omega(\xi_r)$ iloczynu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$.

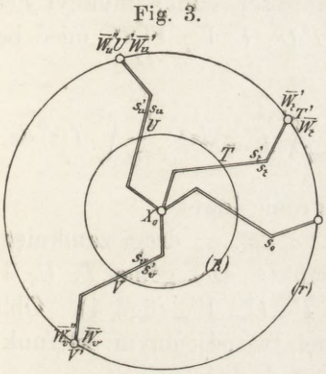
Zajmiemy się teraz znaczeniem wyrazów K_∞ i $\Omega(\xi_r)$ szeregów $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ i $\mathfrak{P}(x-x_0)$ w przypadku, kiedy szereg $\mathfrak{P}(x-x_0)$ zbieżny w kole (R) jest elementem funkcyi analitycznej wielowartościowej. Na obwodzie koła (R) przyjmijmy tylko punkty szczególne, wie-

lokrotne, rozgałęzienia (*Verzweigungs-Punkte, points de ramification*) z wykluczeniem punktów istotnie lub nieistotnie szczególnych nie tylko na obwodzie koła (R), ale i na całym obszarze (x) wszystkich gałęzi funkcyi, którą właśnie $\mathfrak{P}(x-x_0)$ określa.

Gdy $\overline{W}_\mu$ są wartości funkcyi $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ w punktach S_0, $S_1, \ldots, S_{m-1}$ pewnego koła (r) spółśrodkowego z (R), to, jak długo jest $|x-x_0|=r<R$, mamy i tu $\lim_{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m-1}\overline{W}_\nu=0$. Jeżeli $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$ leżą już na kole $(r)>(R)$, to wtedy $\overline{W}_\nu$ pojmować trzeba jako przeprowadzenia szeregu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ po drogach przystających $s_0, s_1, \ldots, s_\nu, \ldots$ do tych punktów.

Gdy m jest $=\infty$, to dróg tych jest również nieskończenie wiele. Przedstawiają się one jako nieskończony (całkowity) zbiór krzywodrożnych promieni koła (r). Dla uproszczenia przyjmiemy, że żadna z tych dróg nie przecina się sama z sobą. Niech dalej, na obwodzie koła (R) leżą trzy punkty szczególne wielokrotne T, U, V (sposób poszukiwania nie zmieni się gdy przyjmiemy, że jest ich ogólnie n); (R) i (r) i na samym obwodzie koła (r) niech już nie będzie żadnych punktów szczególnych.

Fig. 3.



Przy tych założeniach, będą 3 z dróg przystających, a mianowicie s_t, s_u, s_v przechodziły przez punkty szczególne T, U, V (fig. 3). Każdą z nich kiedy $m=\infty$ możemy uważać za dwie nieskończenie siebie bliskie, przystające drogi (s_t, s'_t), (s_u, s'_u), (s_v, s'_v), które obejmując T, U, V prowadzą do tych samych punktów T', U', V' koła (r) i dają tam po dwie wartości różniące się w sposób skończony od siebie, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
&\text{w}\quad T' - \overline{W}_t,\ \overline{W}'_t\\
&\text{w}\quad U' - \overline{W}'_u,\ \overline{W}''_u\\
&\text{w}\quad V' - \overline{W}''_v,\ \overline{W}_v.
\end{aligned}$$

Obchodząc koło (r) w kierunku dodatnym i znacząc w każdym punkcie wartości $\overline{W}_\nu$ po drogach przystających s_ν otrzymane, dostaniemy kolejno zakresy wartości:

$$\begin{aligned}
&(\overline{W}'_t \ldots\ldots \overline{W}'_u) \text{ na łuku } T'\,U'\\
&(\overline{W}''_u \ldots\ldots \overline{W}''_v) \quad ,, \quad ,, \quad U'\,V'\\
&(\overline{W}_v \ldots\ldots \overline{W}_t) \quad ,, \quad ,, \quad V'\,T',
\end{aligned}$$

które w poszczególnych tych zakresach, od wartości początkowej do końcowej zmieniają się w sposób ciągły.

Przyjmując, że granicę $\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{W}_\nu$ obliczamy począwszy od wartości $\overline{W}'_t$, mamy:

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{W}_\nu = \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} [(\overline{W}'_t + .. + \overline{W}_u') + (\overline{W}_u'' + .. + \overline{W}_v'') + (\overline{W}_v + . + \overline{W}_t)]$$

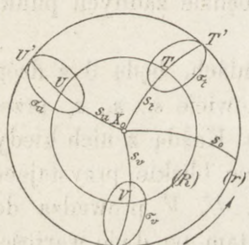
§. 19. Wprowadzenie całek krzywodrożnych.

Przerabiając ostatnią sumę na całkę zamkniętą, określoną i oznaczając przez $f'(z)$, $f''(z)$, $f(z)$ $[z = x - x_0]$ wartości samej funkcyi $f(z)$ określonej elementem $\mathfrak{P}(x - x_0)$ na łukach $T'U'$, $U'V'$, $V'T'$, mieć będziemy:

$$(12) \qquad \lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{W}_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{T'}^{U'} f'(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{U'}^{V'} f''(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{V'}^{T'} f(z)\, dz,$$

jako pierwsze określenie sumy stojącej po stronie lewej.

Fig. 4.



Oznaczmy przez σ_t, σ_u, σ_v drogi zamknięte, okrążające jedynie punkty szczególne T, U, V, a przechodzące przez T', U', V', (fig. 4). Obliczone po tych drogach w odjemnym kierunku całki funkcyi $f(z)$, niech będą:

$$'\int_{\sigma_t} f(z) dz \text{ o początkow. } f(z) = W_t, \text{ a końcow. } W_t'$$

$$'\int_{\sigma_u} f(z) dz \quad " \quad " \quad W_u' \quad " \quad W_u''$$

$$(13) \qquad '\int_{\sigma_v} f(z) dz \quad " \quad " \quad W_v'' \quad " \quad W_v,$$

gdzie W bez położonej nad nim kreski oznacza wartość samej funkcyi $f(z)$ i niech dają — przez stosowny dobór owalów σ_t, σ_u, σ_v — te same wartości, jakie wynikają, kiedy używamy dróg zamkniętych:

$$\underbrace{T'\,T\,x_0}_{s_t}\ \underbrace{T\,T'}_{s_t'},\quad \underbrace{U'\,U\,x_0}_{s_u}\ \underbrace{U U'}_{s_u'},\quad \underbrace{V'\,V\,x_0}_{s_v}\ \underbrace{V V'}_{s_v'}.$$

Tedy początkowe i końcowe wartości funkcyi $f(z)$ w całkach (3) wskazują, żeśmy te całki po drogach σ_t, σ_u, σ_v obliczyli w odjemnym kierunku.

Mając już te całki, możemy — wskutek uczynionych założeń o zakresie $|x-x_0|<r$ — położyć idąc za Cauchym:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{U'} f'(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_u}' f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{V'} f''(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_v}' f(z)dz + \quad (13')$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{V'}^{T'} f(z)dz + \int_{\sigma_t} f(z)dz = 0.$$

Stąd — gdy opuszczając kreski położone nad całkami (13), uważać je już będziemy za całki obliczone w kierunku dodatnym — mieć będziemy

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} W_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_t} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_u} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_v} f(z)\,dz, \quad (14)$$

jako drugą definicyę granicy sumy.

Z drugiej strony ta granica jest przeprowadzeniem wyrażenia

$$K_x = \lim_{m=\infty}\left[a_{m-1}(x-x_0)^m + a_{2m-1}(x-x_0)^{2m} + \ldots\right]$$
$$= \lim_{m=\infty}\left[a_{m-1}\rho^m + a_{2m-1}\rho^{2m} + \ldots\right], \quad \rho = |x-x_0|,$$

należącego do iloczynu $(x-x_0)\,\mathfrak{P}(x-x_0)$ po drodze przystającej z drogą obraną s_0 do któregokolwiek punktu ξ_r koła (r). Gdy takie przeprowadzenie nazwiemy $\Omega(\xi_r)_{s_0}$, to mieć w niem będziemy trzecią definicyą sumy $\lim\limits_{m=\infty} \frac{1}{m}\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} W_\nu$.

Przy tem $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ jest określone równaniem:

$$\Omega(\xi_r)_{s_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{U'} f'(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{V'} f''(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{V'}^{T'} f(z)\,dz, \quad (15)$$

albo

$$\Omega(\xi_r)_{s_0} = \frac{1}{2\pi i}(T)\,\sigma_t + \frac{1}{2\pi i}(U)\sigma_u + \frac{1}{2\pi i}(V)\,\sigma_r, \quad (16)$$

jeżli, dla krótkości, całki o drogach σ_t,... oznaczymy przez $(T)\,\sigma_t$,....

§. 20. **Wieloznaczność wyrażenia $\Omega(\xi_r)$.**

Dodanie znaczku s_0 wyrazowi $\Omega(\xi_r)$ nie jest tu bez przyczyny. I tak: obierając w miejsce s_0 drogę inną s_0' i drogi do niej przystające, dostaniemy na kole (r) inne całkiem punkty T', U', V' [1])

[1]) Koło (r) z nowymi punktami T', U', V' odnoszącymi się do s'_0 przedstawi się jako koło (r) obrócone około środka wraz z pierwotnymi punktami T', U', V' odniesionymi do s_0.

i inne owale σ_t, σ_u, σ_v, tak że teraz przeprowadzenie $\Omega(\xi_r)'_{s_0}$ będzie całkiem różne od przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)_{s_0}$. Widać to także z równania (15). Albowiem ponieważ teraz drogi są przystające do s'_0, przeto na kole (r) dostajemy inne łuki $T'U'$, $U'V'$, $V'T'$, a do nich właśnie odnosić się będą całki w równaniu (15). Mamy więc twierdzenie:

P r z e p r o w a d z e n i e $\Omega(\xi_r)$ j e s t w d z i e d z i n i e f u n k c y j w i e l o z n a c z n y c h n i e s k o ń c z e n i e w i e l o w a r t o ś c i o w e w t e m z n a c z e n i u, ż e — k i e d y n a o b r a n e j d r o d z e s_0 m a t o p r z e p r o w a d z e n i e w e w s z y s t k i c h p u n k t a c h k o ł a (r) w a r t o ś ć $\Omega(\xi_r)_{s_0}$, t o u ż y w a j ą c d r o g i s'_0 d o s t a j e m y w e w s z y s t k i c h p u n k t a c h t e g o s a m e g o k o ł a (r) w a r t o ś ć $\Omega(\xi_r)'_{s_0} \gtrless \Omega(\xi_r)_{s_0}$.

To wynika zresztą już i z uwag rozdziału I. Powiedzieliśmy tam (§. 7), że w przypadku ogólnym pojedynczy punkt szczególny T_0 szeregu danego występuje m-krotnie w szeregu wydzielonym mod. m i tworzy układ należący do T_0 mod. m. Tutaj — przy $m=\infty$ — będzie miało K_∞ na (R) na każdym dowolnie małym łuku koła (R) nieskończenie wiele punktów wielokrotnych.

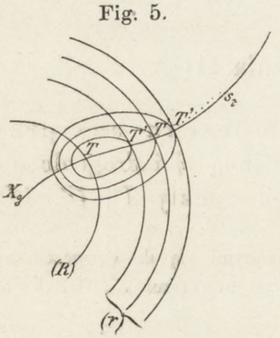
Stąd wynika, że w a r t o ś ć $\Omega(\xi_r)$, c h o ć t e n s a m p u n k t ξ_r, z a t r z y m a m y, z m i e n i a s i ę n a i n n ą, g d y d o t e g o p u n k t u i n n ą d r o g ą d o c h o d z i m y.

§. 21. Zmiana wartości $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ ze zwiększającem się kołem (r) Zachowanie się na kołach przechodnych przez punkty szczególne.

Trzeba jeszcze, zatrzymując stale obraną drogę s_0, zbadać jak się zmienia $\Omega(\xi_r)_{s_0}$, kiedy koło (r) zmienia swoją wielkość.

Przyjmijmy, że poza kołem (R) jest (r_1) pierwszem kołem, na którem leżą nowe punkta szczególne T_1, U_1, V_1 funkcyi $f(z)$ i przypuśćmy, że ich tu znowu jest tylko trzy.

Fig. 5.

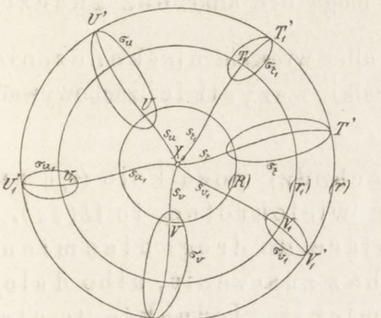


We wnętrzu pierścienia $(R \ldots r_1)$ będzie się wtedy $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ na współśrodkowych kołach [z kołem (R)] w ciągły sposób zmieniać. Każda bowiem z całek $(T)\sigma_t$, $(U)\sigma_u$, $(V)\sigma_v$ — przy posuwających się w ciągły sposób po drogach s_t, s_u, s_v punktach T' U' V' (fig. 5) i zmienianiu się według tego owalów σ_t σ_u σ_v — będzie się zmieniać w sposób ciągły, tak iż prawa strona równania

(16) jest z tego względu ilością ciągłą. Równanie (15) upoważnia do tego samego wniosku.

Chcąc $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ wyznaczyć i zbadać w punktach poza kołem (r_1) leżących, zatoczmy koło $(r) > (r_1)$ (fig. 6) tak, aby i między temi kołami i na kole (r) nie było żadnego punktu szczególnego funkcyi $f(z)$.

Fig. 6.



Przedłużmy w pewny oznaczony sposób drogę s_0 aż do jej przecięcia się z kołem (r). Przez to już wszystkie drogi przystające do s_0 sięgną aż do punktów koła (r). Trzy z tych dróg przystających, a mianowicie: s_t, s_u, s_v, przechodzi przez punkty szczególne T, U, V (na kole (R)), a trzy inne s_{t_1}, s_{u_1}, s_{v_1} przez punkty szczególne T_1 U_1 V_1 (na kole (r_1)). Pierwsze z nich niech przecinają koło (r) w punktach T', U', V', drugie zaś w punktach T_1', U_1', V_1'. Utwórzmy owale σ_t, σ_u, σ_v przechodzące przez T', U', V' i owale σ_{t_1}, σ_{u_1}, σ_{v_1} przechodzące przez T_1', U_1', V_1', tedy —tworząc tu naprzód związek analogiczny ze związkiem (13') i pamiętając potem na definicyą przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)s_0$, mieć będziemy:

$$\Omega(\xi_r)_{s_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{T_1'} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{T'_1}^{U'} f'(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{U'_1} f''(z)\,dz \qquad (15')$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{U'_1}^{V'} f'''(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{V'}^{V'_1} f''''(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{V'_1}^{T'} f'''''(z)dz,$$

jeżeli T', U', V' T_1', U_1', V_1' tak leżą na kole (r), jak to wskazuje fig. 6, albo pisząc krócej:

$$\Omega(\xi_r)_{s_0} = \frac{1}{2\pi i}\left[(T)\sigma_t + (U)\sigma_u + (V)\sigma_v\right] + \frac{1}{2\pi i}\left[(T_1)\,\sigma_{t_1} + (U_1)\,\sigma_{u_1} + (V_1)\,\sigma_{v_1}\right].$$

W podobny sposób przeniesiemy definicyą przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)\,s_o$ i po za koło (r), a stąd mamy twierdzenie:

Przeprowadzenie $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ —nieskończenie wieloznaczne— wyraża się w punktach każdego koła $(r) > (R)$, nie przechodzącego przez punkty szczególne, tyloma całkami łukowemi (15'), lub tyloma całkami o drogach zamkniętych (16'), ile punktów szczególnych wielokrotnych funkcyi $f(z) = \mathfrak{P}(x - x_o)$ leży we wnętrzu tego koła (r).

Weźmy koło (r) większe od (r_1), ale nieskończenie mało różniące się od (r_1) i zwróćmy naszą uwagę na punkty T_1, U_1, V_1, leżące na (r_1), oraz na całki $(T_1)_{\sigma_{t_1}}$, $(U_1)_{\sigma_{u_1}}$, $(V_1)_{\sigma_{v_1}}$. Tedy punkty T'_1, U'_1, V'_1 leżą wtedy nieskończenie blisko punktów T_1, U_1, V_1, a dołączone w (16′) całki $(T_1)_{\sigma_{t_1}}$, $(U_1)_{\sigma_{u_1}}$, $(V_1)_{\sigma_{v_1}}$ mogą być albo bez znaczenia, albo skończone i oznaczone, albo wreszcie nieskończenie małe. Przytem nie potrzebują się te całki wszystkie zachowywać równocześnie w jednakowy sposób.

Stąd wnosimy: Kiedy (r) przechodzi poza koło (r_1), na którem leżą punkty szczególne wielokrotne, to $\Omega(\xi_\nu)_{s_0}$ — gdy obierzemy drogi przystające do drogi niezmiennej s_0 — może tamże być albo bez znaczenia, albo dalej się jeszcze w ciągły sposób zmienia. Jednakże ta ciągłość poza kołem (r_1) będzie mieć inny charakter niż wewnątrz tegoż koła [1]; — albo nareszcie $\Omega(\xi_\nu)_{s_0}$ przybrać tam może wartość inną, różniącą się w sposób skończony od wartości tuż poprzedzającej. Zależy to od wartości całek $(T_1)_{\sigma_{t_1}}$, $(U_1)_{\sigma_{u_1}}$, $(V_1)_{\sigma_{v_1}}$, których owale σ_{t_1}, σ_{u_1}, σ_{v_1} przechodzą przez punkty T'_1 U'_1, V'_1 nieskończenie bliskie punktów T_1, U_1, V_1.

Ostatniemi twierdzeniami mamy dostatecznie określone i znaczenie i zachowanie się przeprowadzenia $\Omega(\xi_r)_{s_0}$.

Zauważymy przytem, że do obliczenia $\Omega(\xi_\nu)_{s_0}$ najlepiej używać wzorów (15) i (15′).

Weźmy n. p. pod uwagę funkcyą dwuwartościową

$$f(x) = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}}, \quad n \text{ całkowite dodatne,}$$

o n punktach szczególnych, wielokrotnych $T_s = e^{\frac{2\pi s i}{n}}$, $1 = 0, 1, \ldots (n-1)$. Połóżmy:

[1]) Ta zmienna ciągłości przypomina przypadek równania $y = f(x)$, w którem $f(x)$ jest funkcyą jednoznaczną, określającego linią krzywą takiej natury, że jej rzędne w pewnym ustępie odcinka x zmieniają się w sposób ciągły, ale w pewnym punkcie $x = x_0$ tego ustępu posiada krzywa dwie różne ale oznaczone styczne (dziób).

$$\frac{1.\,3.\,5.\dots 2q-1}{2.\,4.\,6.\dots\;\;2q} = \mu_q = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2q}\vartheta.\,d\vartheta\,, \tag{17}$$

to elementem funkcyi $f(x)$ w otoczeniu punktu $x = 0$ będzie szereg potęgowy:

$$\mathfrak{P}(x) = x^{n-1}\,[\,1 + \mu_1\, x^n + \mu_2\, x^{2n} + \mu_3\, x^{3n} + \dots\,]$$

o kole zbieżności $(R) = (1)$. Wyraz K_∞ należący do $x\,.\,\mathfrak{P}(x)$ ma tu postać:

$$K_\infty = \lim_{m_1=\infty}\,[\mu_{m_1-1}x^{m_1 n} + \mu_{2m_1-1}\,.\,x^{2m_1 n} + \mu_{3m_1-1}\,x^{3m_1 n} + \dots\,]$$

i jest dla obranych modułów $m = m_1 n$ granicą szeregów, które już przy skończonych m^1 zatrzymują ostatecznie jednakową postać (3).

Na podstawie związku (17) mamy dalej:

$$K_\infty = \lim_{m_1=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\sin^2\vartheta}\Big[\,(x^{\frac{n}{2}}\sin\vartheta)^{2m_1} + (x^{\frac{n}{2}}\sin\vartheta)^{4m_1} + \dots\,\Big]\,d\vartheta$$

$$= \lim_{m_1=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left(x^{\frac{n}{2}}\sin\vartheta\right)^{2m_1} d\vartheta}{\sin^2\vartheta\Big[1-(x^{\frac{n}{2}}\sin\vartheta)^{2m_1}\Big]} = \tag{18}$$

$$\lim_{m_1=\infty}\frac{x^{nm_1}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2m_1}\vartheta\,.\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta\,[\,1-x^{nm_1}\sin^{2m_1}\vartheta\,]}\,.$$

Granica ta ma widocznie dla $|x| = r < 1$ wartość zero, jak być powinno. Dla $|x| = r > 1$ ma ona być wyrażeniem $\Omega(\xi_r)_{s_0}$, którego wartość wyznaczymy za pomocą równania (15).

Połóżmyż $x = re^{\varphi i}$, $r > 1$ i załóżmy, że droga s_ι, przechodząca przez punkt wielokrotny szczególny $T_0 = +1$, przecina koło (r) w takim punkcie T_0', że $\gtrless T_0$ o $T_0' = \psi$, oraz że na tej drodze otrzymana wartość funkcyi $f(x)$ w punkcie T_0' ma znak dodatny, to mieć będziemy:

$$\Omega(\xi_\nu)_{s_0} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\int_{\psi+\frac{2s\pi}{n}}^{\psi+\frac{2(s+1)\pi}{n}}\frac{r^n\,.\,e^{n\varphi i}d\varphi i}{\sqrt{1-r^n\,e^{n\varphi i}}}$$

$$= -\frac{1}{n\pi i}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\Bigg|_{\psi+\frac{2s\pi}{n}}^{\psi+\frac{2(s+1)\pi}{n}}\sqrt{1-r^n e^{n\varphi i}}\,.$$

Chcąc z pierwiastku $\sqrt{1-r^n e^{n\varphi i}}$ otrzymać rozwinięcie, mające znaczenie dla $r > 1$, połóżmy go $= i r e^{\frac{n}{2}\frac{n}{2}\varphi i} \cdot \sqrt{1-r^{-n} e^{-n\varphi i}}$. W takiem rozwinięciu da wtedy drugi czynnik — za podstawieniem $\varphi = \psi + \frac{2s\pi}{n}$, $s=0, 1, \ldots, n-1$ — zawsze jednę i tę samą wartość: $\sqrt{1 - r^{-n} e^{-n\psi i}}$. Dostaniemy więc:

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = -\frac{1}{n\pi} r^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}\psi i} \sqrt{1-r^{-n} e^{-n\varphi i}} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left[e^{(s+1)\pi i} - e^{s\pi i} \right].$$

Połóżmy $(-1)^s = e^{s\pi i}$, to ostatecznie okaże się

$$(19) \qquad \Omega(\xi_r)_{s_o} = +\frac{2}{\pi i} \sqrt{1-r^n e^{n\psi i}}, \quad r > 1.$$

$\Omega(\xi_r)_{s_0}$ jest więc na całem kole (r) w ten sposób nieskończenie wieloznaczne, że zależy od kąta $\psi = T_o \, o \, T_o'$ t. j. od punktu T_o', w którym s_t przecina koło (r) [1]). Wartość (19) jest zarazem wartością granicy całki (18) jeżli weźmiemy $x = re^{\varphi i}$, $r > 1$.

§. 22. O wyrażeniu $\Omega(\xi_v)_{s_o}$ dla samego szeregu potęgowego $\mathfrak{P}(x - x_o)$.

Zwróćmy się teraz do obliczenia $\Omega(\xi_r)_{s_o}$ dla samego szeregu danego $\mathfrak{P}(x-x_o)$. Jego K_∞ ma kształt:

$$K_\infty = a_o + \lim_{m=\infty} \left[a_m (x-x_o)^m + a_{2m} (x-x_o)^{2m} + \ldots \right]$$

Tutaj jest $a_o = f(x_o)$ pozostałością w punkcie x_o funkcyi $\frac{f(x)}{x-x_o}$, gdzie $u = f(x)$ jest funkcyą określoną elementem $\mathfrak{P}(x-x_o)$. Utwórzmy funkcyą $v = f(x) - a_o$, to iloraz $\frac{v}{x-x_o}$ będzie już w punkcie x_o skończony i oznaczony. W skutek tego będziemy mogli $\Omega_v(\xi_r)_{s_o}$ funkcyi v wyznaczyć na każdem kole $(r) > (R)$ i przedstawić takowe całkami, rozumując w ten sam sposób, jakeśmy to zrobili w przypadku iloczynu

[1]) Droga s_t jest drogą przechodzącą nieskończenie blisko nad punktem T_0, a kończącą się w T_0'. Drogę tę jednak — jak tego teorya funkcyi uczy — zmienić można na nieskończenie wiele innych dróg dających w T_0' tę samą wartość funkcyi.

$(x-x)\,\mathfrak{P}(x-x_o)$. Z drugiej strony otrzymamy z K_∞ na $\Omega(\xi_r)_{s_o}$ danego szeregu wartość

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = a_o + \text{przeprowadzenie wyrazu} \lim_{m=\infty} [\,a_m(x-x_o)^m + \ldots\,],$$

czyli

$$\Omega(\xi_\nu)_{s_o} = a_o + \Omega_v(\xi_\nu)_{s_o}.$$

Otrzymamy więc ostatecznie:

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = a_o + \frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{U'} \frac{v'}{x-x_0}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{V'} \frac{v''}{x-x_0}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{T'} \frac{v'''}{x-x_0}\,dx, \quad (20)$$

albo

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = a_0 + \frac{1}{2\pi i}[\,T\,]_{\sigma_t} + \frac{1}{2\pi i}[\,U\,]_{\sigma_u} + \frac{1}{2\pi i}[\,V\,]_{\sigma_v}, \quad (21)$$

gdzie $(r) > (R)$

v', v'', v''' są to wartości funkcyi v otrzymane po drogach przystających do s_0 na łukach $T'\,U'$, $U\,V'$, $V'\,T'$, zaś $[\,T\,]_{\sigma_t}$, $[\,U\,]_{\sigma_u}$, ... są to całki funkcyi $\dfrac{v}{x-x_0}$ obliczone po owalach σ_t, ...

Lecz równanie (20) można także napisać w sposób następujący:

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = a_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{U'} \frac{u'}{x-x_o}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{V} \frac{u''}{x-x_o}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{T'} \frac{u'''}{x-x_o}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{T'} \frac{a_o}{x-x_o}\,dx,$$

a że całka zamknięta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{T'} \frac{a_o}{x-x_o}\,dx = a_o,$$

przeto mamy ostatecznie:

$$(20') \quad \Omega(\xi_r)_{s_o} = \frac{1}{2\pi i}\int_{T'}^{U'} \frac{u'}{x-x_o}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{U'}^{V'} \frac{u''}{x-x_o}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{V'}^{T'} \frac{u'''}{x-x_o}\,dx.$$

Przeciwnie w określeniu

$$(21') \qquad \Omega(\xi_r)_{s_o} = a_o + \frac{1}{2\pi i}[T]_{\sigma_t} + \frac{1}{2\pi i}[U]_{\sigma_u} + \frac{1}{2\pi i}[V]_{\sigma_v}$$

odnoszą się całki do ilorazu $\dfrac{v}{x-x_o}$.

Jeżeli wewnątrz koła (r) istnieją punkty szczególne wielokrotne T, U, V na kole (R), tudzież T_1, U_1, V_1 na kole $(r_1) > (R)$, a przy użyciu dróg przystających do s_o odpowiadają im na (r) punkty (T', U', V'), (T'_1, U'_1, V'_1) w takiem ułożeniu jak wskazuje fig. 6, to mamy:

$$(20'') \qquad 2\pi i.\,\Omega(\xi_r) = \int_{T'}^{T} \frac{u'}{x-x_o}\,dx + \int_{T'_1}^{U'} + \int_{U'}^{U'_1} + \int_{U'_1}^{V'} + \int_{V'}^{U'_1} + \int_{U'_1}^{T'},$$

albo

$$(21') \ \Omega(\xi_r)_{s_o} = a_o + \frac{1}{2\pi i}\Big([T]_{\sigma_t} + [U]_{\sigma_u} + [V]_{\sigma_v} + [T_1]_{\sigma_{t_1}} + U_{1\sigma_{u_1}} + + [V_1]_{\sigma_{v_1}}\Big).$$

W pierwszem równaniu posiada u, w drugiem v, na łukach całek wartości, otrzymane na tych łukach przeprowadzeniem tych funkcyj z punktu x_o po drogach przystających do s_o. Kiedy wprowadzamy funkcyę v, to obojętnem jest, czy owale σ_t, ... obejmują w sobie punkt x_o, czy nie.

Aby pokazać rzecz choćby na najprostszym przykładzie, weźmy funkcyą $u = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ o jednym punkcie szczególnym $T=1$. Jej elementem w otoczeniu punktu $x=0$ jest

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots,$$

gdzie μ_q mają znaczenie określone równaniem (18). Do szeregu $\mathfrak{P}(x)$ należy:

$$K_\infty = \lim_{m=\infty} [1 + \mu_m x^m + \mu_{2m} x^{2m} + \ldots]$$

$$= \lim_{m=\infty} \frac{1}{\pi}\int_o^\pi \frac{d\vartheta}{1-x^m \sin^{2m}\vartheta}.$$

Dla $|x| < 1$, ma ta granica wartość $=1$, jak być powinno; zaś dla $|x| > 1$ ma ona dać przeprowadzenie $\Omega(\xi_r)_{s_o}$. Aby więc $\Omega(\xi_r)_{s_o}$ obliczyć, tworzymy

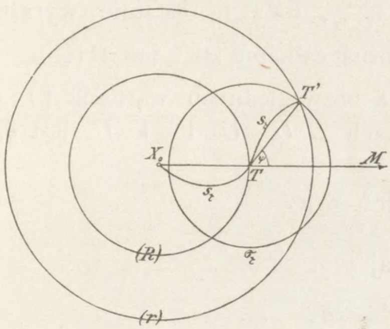
$$\frac{v}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x},$$

a wtedy mamy:

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_t} \left[\frac{1}{x\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x} \right] dx\,.$$

Kładąc $x = 1 + h e^{\varphi i}$, gdzie $h = TT'$ — (fig. 7) — mamy w owalu σ_t koło, którego środek leży w punkcie T i które przechodzi przez punkt T' przecięcia się drogi s_t z kołem (r). Połóżmy dalej $\sphericalangle MTT' = \psi$, to mieć będziemy:

Fig. 7.



$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = 1 + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\psi}^{\psi+1\pi} \frac{h^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\varphi}{2} i}\, d\varphi i}{1 + h e^{\varphi i}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\psi}^{\psi+2\pi} \frac{h e^{\varphi i}\, d\varphi i}{1 + h e^{\varphi i}}\,.$$

Gdy $h < 1$, to druga całka ma wartość zera, albowiem σ_t nie obejmuje wtedy punktu $x_o = 0$.

Mamy więc wtedy:

$$\Omega(\xi_r)_{s_o} = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\text{arc tg}(-h^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\psi}{2} i}) - \text{arc tg}\; h^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\psi}{2} i} \right],$$

ostatecznie zaś

(22) $$\Omega(\xi_r)_{s_o} = 1 - \frac{2}{\pi}\,\text{arc tg}\,\sqrt{he^{\psi i}}\,.$$

Lecz wiemy z poprzedniej teoryi, że w takich obliczeniach obojętną jest rzeczą, czy owal σ_t obejmuje punkt $x_o = 0$, czy też nie. Dla tego wypadek (22) ma ważność i w przypadku $h > 1$. Widzimy przytem, że — kładąc — $x = 1 + h e^{\psi i}$ — granica

$$\frac{1}{\pi}\lim_{m=\infty}\int_{o}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - x^m \sin^{2m}\vartheta} = 1 - \frac{2}{\pi}\,\text{arc tg}\,\sqrt{he^{\psi i}}\,.$$

§. 23. Wzmianka o największej bezwzględnej wartości funkcyi na okręgu koła $(r) > (R)$.

Utwórzmy wreszcie iloraz $\frac{\mathfrak{P}(x-x_0)}{(x-x_0)^\nu}$; a do niego należące wyrażenie $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ oznaczmy przez $\Omega(\xi_r)_{\nu, s_0}$, tedy to ostatnie wyrażenie zupełnie analogicznie przedstawić można całkami tak, jak $\Omega(\xi_r)_{s_0}$ samego szeregu. A jeżli największa z bezwzględnych wartości $[f(x)]$, $[f'(x)]$, $[f''(x)]$ funkcyi $f(x)$ na łukach $T' U'$, $U' V'$ $V' U'$ jest g, to mamy

$$[\Omega(\xi_r)_{\nu, s_0}] r^\nu \leq g.$$

W razie $r < R$ dostajemy tutaj

$$[a_\nu] r^\nu \leq g,$$

a więc związek znany z teoryi szeregów potęgowych.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

ROZDZIAŁ II.

Część pierwsza. Funkcye jednoznaczne.

Część druga. Funkcye wieloznaczne.